



MATEMÁTICA

Volume 01





MATEMÁTICA Volume 01

Frente A

01 3 Raciocínio lógico
Autor: Paulo Vinícius
Ribeiro

02 11 Potenciação e
radiciação Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

Frente B

01 17 Produtos notáveis e
fatoração Autor: Luiz Paulo

02 21 Divisibilidade,
MDC e MMC Autor: Luiz
Paulo

Frente C

01 29 Teoria dos
conjuntos Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

02 37 Conjuntos
numéricos Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

Frente D

01 43 Noções primitivas
de geometria plana Autor:
Paulo Vinícius Ribeiro

02 49 Triângulos e pontos
notáveis Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

Sumário - Matemática

Frente E 01 57 Trigonometria no
triângulo retângulo Autor: Frederico Reis

02 63 Arcos e ciclo trigonométrico Autor:
Frederico Reis

03 69 Funções seno e
cosseno Autor: Frederico
Reis

2 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Raciocínio lógico

01 A

Lógica (do grego *logos*) significa pensamento, ideia,
Conectivo e

argumento. Ela tem o objetivo primordial de garantir
uma linha

de pensamento que chegue a conhecimentos
verdadeiros. Pondo-se o conectivo **e** (representado
pelo símbolo $\wedge$) entre

duas proposições simples **A** e **B**, obtemos uma
proposição

Podemos, então, dizer que a lógica nos ensina a lidar
composta. Essa nova proposição é dita conjunção
das

com os argumentos, raciocinando corretamente para
proposições originais **A** e **B**, ou seja, é a proposição em
que

não chegarmos a conclusões equivocadas.
Estudaremos se declaram ao mesmo tempo **A** e **B**.
neste módulo alguns princípios complementares da
lógica

A conjunção é verdadeira quando **A** e **B** forem ambas
importantes para o estudo da Matemática.
verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $A \wedge B$

é falsa.

PROPOSIÇÕES Exemplo 1 **A**: Cinco é ímpar.
(verdadeira)

Proposição é uma declaração (afirmativa ou
negativa) que **B**: A água é incolor. (verdadeira)
pode ser classificada como verdadeira ou falsa. $A \wedge B$:
Cinco é ímpar e a água é incolor. (verdadeira)

**Exemplo
2**

São proposições:

A: Belo Horizonte é maior do que Goiânia.
(verdadeira)

i) **B**: O Rio de Janeiro é maior do que São Paulo.
(falsa) “A Bahia fica na região Nordeste.”

É uma proposição verdadeira. $A \wedge B$: Belo Horizonte é
maior do que Goiânia e o Rio de

Janeiro é maior do que São Paulo. (falsa)

ii) “O dobro de três não é seis.”

É uma proposição falsa. **Conectivo ou**

iii) “Todo triângulo é equilátero.” Pondo-se o conectivo **ou** (representado pelo símbolo $\vee$)

É uma proposição falsa. entre duas proposições simples **A** e **B**, obtemos uma

proposição composta. Essa nova proposição é denominada

Não são proposições, pois não podemos classificar como

disjunção das proposições originais **A** e **B**, ou seja, é a verdadeiras ou falsas:

proposição em que se declara verdadeira pelo menos uma

i) das proposições **A** e **B**. “Antônio gosta de salada?”

É uma oração interrogativa. A disjunção é verdadeira quando ao menos uma das

proposições **A** e **B** for verdadeira; somente se ambas forem

ii) “Thiago, vá estudar para a prova de Biologia.”

falsas é
que

será
falsa.

É uma oração imperativa.

**Exemplo
1**

iii) “ $2x + 3 = 1$ ”

A: Aranhas são mamíferos. (falsa)

É uma equação.

B: Cobras são répteis. (verdadeira)

$A \vee B$: Aranhas são mamíferos ou cobras são répteis.

CONECTIVOS (verdadeira) **Exemplo 2**

A partir de proposições simples, podemos formar proposições **A:** O céu é azul. (verdadeira)

mais complexas, por meio do emprego de símbolos lógicos, **B:** Triângulos não possuem diagonais. (verdadeira) denominados conectivos. As proposições formadas com $A \vee B$: O céu é azul ou triângulos não possuem diagonais. conectivos são chamadas proposições compostas. (verdadeira)

Editora Bernoulli **3**

Frente A Módulo 01

Implicação QUANTIFICADORES

As palavras **se** e **então**, com as proposições **A** e **B** na forma “se **A**, então **B**”, determinam uma nova proposição, Já vimos que sentenças do tipo $x + 2 = 5$ (ou seja,

denominada condicional de **A** e **B**. Essa proposição, que sentenças com variáveis) não são proposições, já que não

também é chamada de implicação, indica-se por $A \Rightarrow B$, são verdadeiras ou falsas. Por isso, essas sentenças são

e pode ser lida de diversas maneiras, como: chamadas de sentenças abertas. Há duas maneiras de

i) Se **A**, então **B**. transformar sentenças abertas em proposições: atribuindo

ii) **A** implica **B**.

valores específicos às variáveis ou utilizando um dos dois

iii) **A** é condição suficiente para **B**.

tipos de quantificadores que veremos a seguir.

iv) **B** é condição necessária para **A**.

Exemplo 1 Proposições envolvendo quantificadores também são

A: Pedro foi ao Ceará. chamadas de proposições quantificadas.

B: Pedro foi ao Nordeste.

$A \Rightarrow B$: Se Pedro foi ao Ceará, então Pedro foi ao Nordeste. **Quantificador universal**
(verdadeira)

$B \Rightarrow A$: Se Pedro foi ao Nordeste, então Pedro foi ao Ceará.

(falsa) O quantificador universal é indicado pelo símbolo $\forall$, e deve

Exemplo 2 ser lido “qualquer que seja”, “para todo” ou “para cada”.

A: Mariana passou no vestibular do ITA.

B: Mariana estudou Matemática. **Exemplo**

$A \Rightarrow B$: Se Mariana passou no ITA, então ela estudou
Se x denota um número real, temos as proposições:

Matemática. (verdadeira)

$A \Rightarrow B$: Estudar Matemática é condição necessária
para i) $\forall x: 2x > 0$ (verdadeira)

passar no ITA. (verdadeira)

A condicional A ii) $\forall x: x + 3 = 1$ (falsa) $\Rightarrow B$ é
falsa somente quando **A** é verdadeira

e **B** é falsa; caso contrário, $A \Rightarrow B$ é verdadeira. Se x
denota um estudante, podemos construir a proposição:

Observe que, se **A** for falsa, então a implicação será $\forall x: x \text{ é inteligente. (falsa)}$

sempre verdadeira. Por exemplo:

- Escrevendo essa proposição em linguagem corrente, temos: falsa $\Rightarrow$ verdadeira, temos conclusão verdadeira.

“todo
estudante
é
inteligente”.

$(5 \text{ é múltiplo de } 3) \Rightarrow (5 > 3) \text{ (verdadeira)}$

- falsa $\Rightarrow$ falsa, temos conclusão verdadeira.

Quantificador existencial

$(3 = 2) \Rightarrow (6 = 4) \text{ (verdadeira)}$

A ideia é que se partirmos de uma proposição falsa
O quantificador existencial é indicado pelo símbolo $\exists$,

podemos concluir qualquer coisa. Mas, a partir de uma e deve ser lido “existe”, “existe ao menos um” ou “existe um”.

proposição verdadeira, temos de deduzir outra verdadeira.

A recíproca de uma implicação **A Exemplo** $\Rightarrow$ B é a implicação $B \Rightarrow A$.

Exemplo 3 Se x denota um número real, temos as proposições:

A: O triângulo ABC é equilátero. **i)** $\exists x: x + 2 = 5$ (verdadeira)

A ii) $\exists x: x_2 + 1 < 0$ (falsa) $\Rightarrow$ **B:** O triângulo ABC é isósceles.

B: Se o triângulo ABC é equilátero, então é o triângulo

ABC isósceles. (verdadeira) Se x denota um estudante, podemos construir a proposição:

$B \Rightarrow A$: Se o triângulo ABC é isósceles, então é equilátero.

(falsa) $\exists x: x$ é inteligente. (verdadeira)

Equivalência Escrevendo essa proposição em linguagem corrente, temos:

“existe
estudante
inteligente”.

Equivalência entre as proposições **A** e **B** é a proposição

indicada por $A \Leftrightarrow B$, pela qual se declara, ao mesmo tempo, OBSERVAÇÃO que $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$.

Portanto, **A** é a condição necessária e suficiente para **B**, Há também um tipo de quantificador, indicado

pelo

e vice-versa. símbolo $\exists!$, que significa “existe um único”.

4 Coleção Estudo

Raciocínio lógico

NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES

Negação de “nenhum”

Negação de proposições simples

Analogamente, para negarmos a proposição “nenhum

homem é fiel”, devemos encontrar pelo menos um
homem

A negação de uma proposição A é simbolizada por $\sim A$, que seja fiel. Temos, então:

que se lê “não A ” ou, simplesmente, “negação de A ”. Assim, A : Nenhum homem é fiel. (falsa) se A é falsa, então $\sim A$ é verdadeira, e, se A é verdadeira,

então $\sim A$ é falsa. Também podemos dizer que negar uma $\sim A$: Existe (pelo menos um) homem fiel. (verdadeira)

proposição acarreta inversão de seu valor lógico. $\sim A$:
Algum homem é fiel. (verdadeira)

OBSERVAÇÃO Negação de “algum” ou “existe”

Para qualquer proposição A , é claro que $\sim(\sim A)$ e A têm

o mesmo valor lógico. **A:** Existe cachorro inteligente. (falsa)

Exemplo Se houver um ou mais cachorros inteligentes, a proposição

A: 4 é primo. (falsa) anterior é verdadeira. Para torná-la falsa, não pode haver

$\sim A$: 4 não é primo. (verdadeira) cachorro inteligente. Portanto, a negação da proposição A é:

$\sim A$: Nenhum cachorro é inteligente. (verdadeira)

Negação de proposições compostas

$\sim A$: Todo cachorro não é inteligente. (verdadeira)

Para negarmos uma conjunção ou disjunção, devemos

inverter o valor lógico de cada proposição e trocar “e” por

“ou”, e vice-versa. **CONTRAPOSITIVA DE UMA**

i) A negação da conjunção (**A e B**) é a disjunção
MATEMÁTICA IMPLICAÇÃO ($\sim A$ ou $\sim B$).

ii) A negação da disjunção (**A ou B**) é a conjunção
($\sim A$ e $\sim B$). **Definição**

Em símbolos, escrevemos:

Dada uma implicação $A \Rightarrow B$, chamamos de
contrapositiva

$$\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow (\sim A) \vee (\sim B)$$

dessa implicação a proposição $\sim B \Rightarrow \sim A$.

$$\sim(A \vee B) \Leftrightarrow (\sim A) \wedge (\sim B)$$

Uma implicação qualquer e sua contrapositiva sempre

Exemplo

têm o mesmo valor lógico, como podemos perceber
nos

A: Marcos trabalha. (verdadeira) exemplos
seguintes.

B: Marcos joga tênis. (falsa)

**Exemplo
1**

$A \vee B$: Marcos trabalha ou joga tênis. (verdadeira)

A: Jorge trabalha. (verdadeira)

$\sim(A \vee B)$: Marcos não trabalha e não joga tênis.
(falsa)

B: Jorge estuda. (falsa)

Negação de “todo” $A \Rightarrow \sim B$: Se Jorge trabalha, então não estuda. (verdadeira)

Para tornarmos falsa a proposição “todo professor é alto”, $B \Rightarrow \sim A$: Se Jorge estuda, então não trabalha.
(verdadeira)

devemos encontrar pelo menos um professor que não é alto.

Exemplo 2

Portanto, seja a afirmação:

A: Todo número primo é ímpar. (falsa)

A: Todo professor é alto. (falsa)

B: Nenhum número par é primo. (falsa)

Sua negação é: $A \Rightarrow B$: Se todo número primo é ímpar, então nenhum

$\sim A$: Existe (pelo menos um) professor que não é alto. número par é primo. (verdadeira)

(verdadeira) $\sim B \Rightarrow \sim A$: Se algum número par é primo, então nem todo

$\sim A$: Nem todo professor é alto. (verdadeira) número primo é ímpar. (verdadeira)

Frente A Módulo 01

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 05. (CEFET-RJ)

Se os pais de artistas sempre são artistas,

então

01. (VUNESP-SP) Um jantar reúne 13 pessoas de uma mesma A) os filhos de não artistas nunca são artistas.

família. Das afirmações a seguir, referentes às pessoas

reunidas, a única necessariamente **VERDADEIRA** é: B) os filhos de não artistas sempre são artistas.

A) Pelo menos uma delas tem altura superior a 1,90 m. C) os filhos de artistas sempre são artistas.

B) Pelo menos duas delas são do sexo feminino.

D) os filhos de artistas nunca são artistas.

C) Pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo

mês. E) os filhos de artistas quase sempre são artistas.

D) Pelo menos uma delas nasceu num dia par.

E) Pelo menos uma delas nasceu em janeiro ou fevereiro.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

02. (UFSCar-SP) Em uma competição de queda de braço,

cada competidor que perde duas vezes é eliminado. Isso **01.**
(Fatec-SP-2007) Numa caixa, existem 10 moedas cujos

significa que um competidor pode perder uma disputa valores
somados totalizam R\$ 1,00. Na caixa, existem

(uma “luta”) e ainda assim ser campeão. Em um torneio moedas de
um centavo e de cinco centavos, entre

com 200 jogadores, o número **máximo** de “lutas” que outras. É
CoRRETo afirmar que na caixa devem existir,

serão disputadas, até se chegar ao campeão, é pelo menos,

A) 99 C) 299 E) 499 A) uma moeda de dez centavos e duas de cinco
centavos.

B) 199 D) 399 B) duas moedas de dez centavos e uma de cinco

centav

03. (UFMG-2007) Raquel, Júlia, Rita, Carolina, Fernando,

C) duas moedas de vinte e cinco centavos e uma de cinco

Paulo, Gustavo e Antônio divertem-se em uma festa.

centav

Sabe-se que

D) duas moedas de vinte e cinco centavos e uma de dez

I) essas pessoas formam quatro casais; e

centav

II) Carolina não é esposa de Paulo.

E) duas moedas de cinquenta centavos.

Em um dado momento, observa-se que a mulher de

Fernando está dançando com o marido de Raquel,

enquanto Fernando, Carolina, Antônio, Paulo e Rita
estão **02.** (Ibmec-SP-2007) Observe o *slogan* de uma cervejaria,

sentados, conversando. Então, é **CoRRRETo** afirmar que utilizado em
uma campanha publicitária:

a esposa de Antônio é

“Se o bar é bom, então o *chopp* é Tathurana.”

A) Carolina. C) Raquel.

Os bares Matriz e Autêntico oferecem a seus clientes

B) Júlia. D) Rita.

chopp das marcas Tathurana e Karakol, respectivamente.

04. Então, de acordo com o *slogan* anterior, pode-se A negação da
afirmação “Nenhuma pessoa lenta em

aprender frequenta esta escola” é concluir que

A) “Todas as pessoas lentas em aprender frequentam A) os dois
bares são necessariamente bons.

esta escola.”

B) “Todas as pessoas lentas em aprender não frequentam B) o bar
Matriz é necessariamente bom e o bar Autêntico

esta escola.” pode ser bom ou não.

C) “Algumas pessoas lentas em aprender frequentam C) o bar Matriz
é necessariamente bom e o bar Autêntico,

esta escola.” necessariamente, não é bom.

D) “Algumas pessoas lentas em aprender não frequentam

D) o bar Matriz pode ser bom ou não e o bar Autêntico,
esta escola.”

necessariamente, não é bom.

E) “Nenhuma pessoa lenta em aprender não frequenta

esta escola.” E) os dois bares, necessariamente, não são bons.

6 Coleção Estudo

Raciocínio lógico

03. (Cesgranrio) A figura a seguir mostra três dados iguais. **06.**

(UFOP-MG–2008) Considere a afirmação: “Em um

O número da face que é a base inferior da coluna de dados grupo de n pessoas, pode-se garantir que três delas

aniversariam no mesmo mês”. O **mENoR** valor de n que

torna verdadeira essa afirmação é

A) 3 B) 24 C) 25 D) 36

07. (UFV-MG–2008) Três jogadores decidiram jogar três

partidas de um determinado jogo, no qual, em cada

partida, há apenas um único perdedor. Combinaram

que aquele que perdesse deveria pagar a cada um dos

outros dois a quantia que cada ganhador possuía naquele

momento. Ao final das três partidas, ocorreu que cada

jogador perdeu uma única partida e que no final cada

A) é 1. jogador ficou com R\$ 8,00. É **CoRRETo** afirmar que o

B) é 2.

A) a terceira partida, no final, perdeu R\$ 4,00.

C) é 4.

B) a primeira partida, no final, perdeu R\$ 4,00.

D) é 6.

C) a terceira partida, no final, ganhou R\$ 4,00.

E) pode ser 1 ou 4. D) a primeira partida, no final, ganhou R\$ 4,00.

04. (OEM-RJ) Alice, Beatriz, Célia e Dora apostaram uma **08.**
(Unifor-CE–2009) Certo dia, o Centro Acadêmico de uma

corrida. **MATEMÁTICA**

Faculdade de Medicina publicou a seguinte notícia:

Alice disse: Célia ganhou e Beatriz chegou em segundo “Todos os alunos serão reprovados em Anatomia!”

lugar. A repercussão dessa manchete fez com que a direção da

Beatriz disse: Célia chegou em segundo lugar e Dora faculdade interpelasse os responsáveis e deles exigisse,

em terceiro. como forma de retratação, a publicação de uma negação

da afirmação feita. Diante desse fato, a nota de retratação

Célia disse: Dora foi a última e Alice, a segunda.

pode
ter
sido:

Cada uma das quatro meninas disse uma verdade e

A) “Nenhum aluno será reprovado em Anatomia.”

uma mentira (não necessariamente nessa ordem).

B) “Algum aluno será aprovado em Anatomia.”

DETERMINE a ordem de chegada das meninas nessa

corrida. C) “Algum aluno será reprovado em Anatomia.”

D) “Se alguém for reprovado em Anatomia, então não

05. (FAAP-SP) Cláudia é mais velha do que Ana? será um aluno.”

I. Roberta é quatro anos mais velha do que Cláudia e E) “Todos os reprovados em Anatomia não são alunos.”

2 anos mais moça do que Ana.

09. (OBM) Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas.

II. A média das idades de Cláudia e Ana é 17 anos.

Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e,
entre as 10 restantes, algumas são brancas e as outras

A) I é suficiente para responder, mas II não é.

são pretas. O **mENoR** número de bolas que devemos

B) II é suficiente para responder, mas I não é. tirar da caixa, sem
lhes ver a cor, para termos a certeza

C) I e II juntas são suficientes para responder, mas de haver pelo
menos 10 bolas da mesma cor, é

nenhuma delas sozinha é suficiente. A) 31 D) 37

D) Cada proposição é suficiente para responder. B) 33 E) 38

E) Nenhuma das proposições é suficiente para responder. C) 35

Frente A Módulo 01

10. São verdadeiras as seguintes afirmações: **13.** Alberto, Bernardo, Carlos e Diego foram jantar em

companhia de suas esposas. No restaurante, sentaram-se

I. Todos os calouros são humanos.

ao redor de uma mesa redonda de forma que:

II. Todos os estudantes são humanos. i) nenhum marido se sentou ao lado de sua esposa.

III. Alguns estudantes pensam. ii) em frente de Alberto se sentou Carlos.

iii) à direita da esposa de Alberto se sentou Bernardo.

Dadas as quatro afirmações a seguir:

iv) não havia dois homens juntos.

1. Todos os calouros são estudantes.

Quem se sentou entre Alberto e Diego?

2. Alguns humanos pensam.

A)
A
esposa
de
Alberto.

3. Nenhum calouro pensa. B) A esposa de Carlos.

C)
A

esposa
de
Diego.

4. Alguns humanos que pensam não são estudantes.

D)
A
esposa
de
Bernardo

Então, as sentenças que são consequências lógicas de

I, II e III são **14.** (CEFET-MG–2007) Considere as afirmativas:

A) 2 I. “Se Paulo é médico, então Artur não é professor”.

B) 4 II. “Se Paulo não é médico, então Bruno é engenheiro”.

Sabendo-se que Artur é professor, pode-se concluir,

C) 2, 3

CoRRETO
que

D) 2, 4

A)
Paulo
é
médico.

E) 1, 2 B) Bruno é engenheiro.

C) Artur é professor e Paulo é médico.

11. (Unimontes-MG) Em uma gincana, três crianças teriam D) Paulo é médico ou Bruno não é engenheiro.

de vestir camisetas azul, preta e branca, sendo uma E) Artur é professor e Bruno não é engenheiro.

cor para cada criança. Seus tênis apresentariam, cada

par deles, uma dessas três cores. Fabrício usaria
tênis **15.** (UFRJ) João não estudou para a prova de Matemática;

azuis, somente Paulo usaria tênis e camiseta da mesma

por conta disso, não entendeu o enunciado da primeira
cor, e Pedro não usaria camiseta nem tênis brancos.

questão. A questão era de múltipla escolha e tinha as
As cores das camisetas de Fabrício, Paulo e Pedro seriam,

seguintes
alternativas

respectivamente,

(A) O problema tem duas soluções, ambas positivas.

A) azul, branco e preto. (B) O problema tem duas soluções, uma
positiva e outra

B) preto, branco e azul. negativa.

(C) O problema tem mais de uma solução.

C) branco, preto e azul.

(D) O problema tem pelo menos uma solução.

D) azul, preto e branco.

(E) O problema tem exatamente uma solução positiva.

12. João sabia que só havia uma alternativa correta.

(UFJF-MG-2008) Uma empresa funciona nos turnos da

Ele pensou um pouco e cravou a resposta certa.

manhã e da tarde. Um trabalhador dessa empresa dispõe

DETERMINE a escolha feita por João. **JUSTIFIQUE**

de **D** dias para cumprir, precisamente, uma jornada de sua resposta.

9 turnos. Nesses **D** dias, ele não foi trabalhar exatamente

6 manhãs e exatamente 7 tardes. Qual é o valor de **D**? **16.** Eduardo mente nas quartas, quintas e sextas e diz a

A) 7 verdade no resto da semana. André mente aos domingos, segundas e terças e diz a verdade no resto dos dias.

B) 9

Se ambos dizem: “Amanhã é um dia no qual eu minto.”,

C) 10 que dia da semana será amanhã?

D) 11 A) Sábado C) Quarta-feira

E) 12 B) Terça-feira D) Sexta-feira

8 Coleção Estudo

Raciocínio lógico

SEÇÃO ENEM Instrução: Texto para as questões **02** e **03.**

Um armazém recebe sacos de açúcar de 24 kg para que

01. sejam empacotados em embalagens menores. O único objeto

(Enem–2007) A diversidade de formas geométricas

disponível para pesagem é uma balança de dois pratos, sem os

especiais criadas pelo homem, ao mesmo tempo em que

pesos
metálicos.

traz benefícios, causa dificuldades em algumas situações.

Suponha, por exemplo, que um cozinheiro precise utilizar

exatamente 100 mL de azeite de uma lata que contenha

1 200 mL e queira guardar o restante do azeite em duas

garrafas, com capacidade para 500 mL e 800 mL cada,

deixando cheia a garrafa maior. Considere que ele não

disponha de instrumento de medida e decida resolver

o problema utilizando apenas a lata e as duas

garrafas. **02.** (Enem–1998) Realizando uma única pesagem, é possível

As etapas do procedimento utilizado por ele estão ilustradas montar pacotes de

nas figuras a seguir, tendo sido omitida a 5ª etapa. A) 3 kg. C) 6 kg. E) 12 kg.

B) 4 kg. D) 8 kg.

1 200 mL 400 mL 400 mL 300 mL

AZEITE AZEITE A AZEITE **03.** (Enem–1998) Realizando exatamente duas pesagens,

os pacotes que podem ser feitos são os de

1ª etapa 2ª etapa 3ª etapa A) 3 kg e 6 kg.

900 mL 300 mL 100 mL

AZEITE 300 mL AZEITE AZEITE B) 3 kg, 6 kg e 12 kg.

? ? C) 6 kg, 12 kg e 18 kg. ?

4ª etapa 5ª etapa 6ª etapa D) 4 kg e 8 kg. **MATEMÁTICA**

E) 4 kg, 6 kg e 8 kg.

Qual das situações ilustradas a seguir corresponde à

5ª etapa do procedimento? **04.** (Enem–1999) Vinte anos depois da formatura, cinco

colegas de turma decidem organizar uma confraternização.

A) 100 mL 700 mL Para marcar o dia e o local da confraternização,

AZEITE 400 mL

precisam comunicar-se por telefone. Cada um conhece

o telefone de alguns colegas e desconhece o de outros.

No quadro a seguir, o número 1 indica que o colega da

linha correspondente conhece o telefone do colega da

B) 200 mL

AZEITE 200 mL coluna correspondente; o número 0 indica que o colega

da linha não conhece o telefone do colega da coluna.

Exemplo: Beto sabe o telefone do Dino que não conhece

o telefone do Aldo.

C) 400 mL

AZEITE **Aldo Beto Carlos Dino Ênio**

Aldo 1 1 0 1 0

Beto 0 1 0 1 0

D) 900 mL

E) 900 mL 200 mL

AZEITE 100 mL O número mínimo de telefonemas que Aldo deve fazer para se comunicar com Carlos é

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Editora Bernoulli **9**

Frente A Módulo 01

05. O jogo consiste em chegar a um determinado ponto sem (Enem–2008) O jogo da velha é um jogo popular, originado

na Inglaterra. O nome “velha” surgiu do fato de esse jogo passar por cima dos pontos pretos já indicados.

ser praticado, à época em que foi criado, por senhoras

idosas que tinham dificuldades de visão e não conseguiam

mais bordar. Esse jogo consiste na disputa de dois 6

adversários que, em um tabuleiro 3×3 , devem conseguir 5

alinhar verticalmente, horizontalmente ou na diagonal, 4

3 peças de formato idêntico. Cada jogador, após escolher

o formato da peça com a qual irá jogar, coloca uma peça

por vez, em qualquer casa do tabuleiro, e passa a vez A B C D E F G H

para o adversário. Vence o primeiro que alinhar 3 peças.

Respeitando-se o movimento da peça torre e as suas regras de movimentação no jogo, qual é o menor número de movimentos possíveis e necessários para que a torre

chegue
à
casa
C1?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

GABARITO

No tabuleiro representado anteriormente, estão

registradas as jogadas de dois adversários em um dado

Fixação

momento. Observe que uma das peças tem formato de

01. C 04. C

círculo e a outra tem a forma de um xis. Considere as

02. D 05. A

regras do jogo da velha e o fato de que, neste momento,

é a vez do jogador que utiliza os círculos. Para garantir 03. A

a vitória na sua próxima jogada, esse jogador pode

Propostos

posicionar a peça no tabuleiro de

01.
A

A) uma só maneira.

02.
D

B) duas maneiras distintas. 03. C

C) três maneiras distintas. 04. A ordem de chegada é: Célia, Alice, Dora e Beatriz.

05.
A

D) quatro maneiras distintas.

06.
C

E) cinco maneiras distintas. 07. C

08.
B

06. (Enem–2009 / Anulada) O xadrez é jogado por duas 09. E

pessoas. Um jogador joga com as peças brancas, o outro, 10. A

com as pretas. Neste jogo, vamos utilizar somente a torre, 11. B

uma das peças do xadrez. Ela pode mover-se para qualquer 12. D

casa ao longo da coluna ou linha que ocupa, para frente 13. B

ou para trás, conforme indicado na figura a seguir: 14. B

15.
Altern
D

16.
C

Seção Enem

01. D 04. C

02. E 05. B

03. C 06. C

10 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Potenciação e radiciação 02 A

POTÊNCIA DE EXPOENTE RAIZ ENÉSIMA ARITMÉTICA

NATURAL Definição

Definição Dados um número real não negativo **a**

e um número

natural n , $n \geq 1$, chama-se de raiz enésima aritmética de a

Dados um número real a e um número natural n , com o número real e não negativo b tal que $b^n = a$.

$n > 1$, chama-se de potência de base a e expoente n o símbolo a^n , chamado radical, indica a raiz enésima número a_n , que é o produto de n fatores iguais a a . aritmética de a . Nele, a é chamado de radicando, e n , de índice.

Dessa definição, decorre que: $a^n = b \Leftrightarrow b^n = a$ e $b \geq 0$

$a_2 = a \cdot a$, $a_3 = a \cdot a \cdot a$, $a_4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$, etc.

OBSERVA



a_n **i)** Da definição decorre $(\dots a \cdot a \cdot a \cdot a = a$, para todo $a \geq 0$.

n fatores **ii)** Observemos na definição dada que:

Dados um número real a , não nulo, e um número natural n , **Correto** **Incorreto**

chama-se de potência de base a e expoente $-n$ o número a^{-n} , $1/36 = 1/6^2 = 1/6^2 = 1/36$ que é o inverso de a_n .

$$9 \ 3 \ 25 \ 5$$

$$= = \pm$$

$$4 \ 2 \ 81 \ 9$$



$$a = -n \ 1$$

$$a_n^3 - 8 = -2^{10,09} = \pm 0,3$$

Por definição, temos ainda que $a_0 = 1$ (sendo $a \neq 0$) e $a_1 = a$. $36 \pm 6 \pm^{149} = \pm 7 = 8 \ 64 \pm$

Propriedades iii) Devemos estar atentos no cálculo da raiz quadrada

de um quadrado perfeito:

Se $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{Q}$, então valem as seguintes

propriedades: $a_2 = |a|$

Exemplos



$$a \ 1^o) \ () - 5_2 = |-5| = 5, \text{ e não } () - 5_2 = -5_m . a_n = a_{m+n}$$



$$a_{m-2n} \neq |x|, \text{ e } \tilde{x} = x = a_{m-n}, a_n \neq 0$$

$$a$$

No conjunto dos números reais, temos situações distintas

$(a.b)_n = a_n.b_n$ conforme n seja par ou ímpar.



$\binom{n}{n} a$ **i) Para n par:**

$\lfloor \rfloor b$ Se $a < 0$, não existe raiz n -ésima de a . $b = , b \neq 0_n$



$(a_m)_n = a_{m.n}$ **Exemplo:** — 5 não existe no conjunto dos números

reais.

Editora Bernoulli 11

Frente A Módulo 02

Se $a = 0$, a única raiz n -ésima é zero.

Propriedades Exemplo: ${}^10 = 0$

As propriedades a seguir se verificam para as potências

Se $a > 0$, a única raiz n -ésima de a é ${}_n a$.

de
expoente
racional.

ii) Exemplo: ${}^14 = 2$ p r Assim, se $a \in \mathbb{R}^*$, $+$ $\in \mathbb{R}$, $\in \mathbb{R}$, então valem as seguintes Para n ímpar: q s

propriedade

Qualquer que seja o número real a , existe uma única

1

raiz n -ésima, que é indicada por ${}_n a$ (ou a_n , como

veremos adelante). $a \cdot a_{q \cdot s} = a_{qs}$

Exemplos_p

$$1^o) =_{qs} - 8 = -2_r \text{ a } 3 \text{ a }_{qpr} -$$

$$2^o) 1 = 1$$

$$3 \text{ a } s$$

ppp

Propriedades (.) $a \cdot b_q = a \cdot b_{q \cdot q}$

Se $a \in \square$, $b \in {}_+ \square$, $m \in$, n^* e p^* , temos: ${}_+ \square \in \square \in \square$
 ${}_{ppq} \left(a \right)_q a$



$${}_n \left(\left| \right. \right) = {}_{pmnp} b \cdot {}_{mp \cdot q} a = a \cdot b$$

$${}_{nnnr} = a \cdot b \cdot a \cdot b \left(\right)_{pspr}.$$



$${}_n a \cdot a_q = a_{qs} {}_n a \ (b \neq 0) = b_n \cdot b$$



$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ RACIONALIZAÇÃO DE

Se $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, temos $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$.

DENOMINADORES

Exemplos

1º) $\sqrt[3]{\frac{25}{3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{3 \cdot 40}} = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{120}} = \frac{10}{\sqrt[3]{120}}$ Para facilitar cálculos, é comum eliminar raízes dos

2º) $\sqrt[2]{\frac{-3}{2}} = \frac{\sqrt[2]{-3}}{\sqrt[2]{2}} = \frac{\sqrt[2]{-3} \cdot \sqrt[2]{2}}{\sqrt[2]{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt[2]{-6}}{2}$ denominadores das frações, através de um processo

Assim, o coeficiente do radical pode ser colocado no

chamado
racionalizaç

radicando com expoente igual ao índice do radical.

Por exemplo, ao realizarmos a divisão $\frac{1}{\sqrt{2}}$, como

POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL é

Definição aproximadamente 1,41, teremos de efetuar .

1 41 ,

Porém, se racionalizarmos a fração dada (multiplicando

Dados um número real **a** (positivo), um número inteiro numerador e denominador por ¹2), teremos:

p e um número natural **q** ($q \geq 1$), chama-se de potência de

base **a** e expoente p a raiz com índice **q** de $a^{1/p}$.
 $= \sqrt[q]{a}$.



p



$a > 0 \Rightarrow a_{q/p} > 0 = a$ E usando a mesma aproximação anterior, ficamos com a



Sendo $p_{1/41, q} > 0$, defini-se a divisão , que é

mais simples que a primeira. $= 0,2q$



Exemplos De modo geral, para racionalizarmos uma fração



3



1º) $2_2 = 2_3 = 2 \cdot 2_2 = 2 \cdot 2$ com denominador a_p , multiplicamos o numerador e o



1

2º) $3_5 = 5$ denominador por a_{np} , pois $a_p \cdot a_{np} = a_{np}$
 $= a_{np} \cdot 3 = a$.

Exemplos EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

$$\mathbf{1}^{\circ}) = . = =_{n2} 335353555555_{m-} + 1010_{21m1} (+$$

10) **01.** (UFLA-MG) O valor da expressão é $\frac{10}{2} + \frac{10}{2} + \frac{10}{2}$

$$2^0) = . = = A) 1 \ 1_{53535} \ 1 \ 3 \ 3 \ 27$$

5 2 5 2 5 3 5 5 **3 3 3 3 3**

B)
10

Caso apareça no denominador de uma fração uma soma m. -2 C) 10 2

de radicais, devemos utilizar os produtos notáveis. _n

D)
m.
+2
10
2

E)
10-
1

Vejam os alguns exemplos de racionalizações:

02. (UFMG) Uma fazenda tem uma área de $0,4 \text{ km}^2$. Suponha

Exemplo 1 que essa fazenda seja um quadrado, cujo lado mede

Quando o denominador é do tipo $a + b$ ou $a - b$, e a e b $\square$ metros. O número $\square$ satisfaz a condição

são raízes quadradas, lembrando que: A) $180 < \square < 210$

B) $210 < \square < 250$

$a_2 - b_2$ C) $400 < \square < 500 = (a + b)(a - b)$

D) $600 < \square < 700$

então devemos multiplicar numerador e denominador por

03. 7

$a - b$ ou $a + b$, respectivamente. Assim: $7 + -$ (UFV-MG)
A expressão , em que a é um

$a a$

número real positivo, equivale a

$$1^{\circ}) 2 \text{ A) } 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot (-) \cdot 5 \cdot 1 - = . = = 5 \cdot 1$$

$$+ 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - () \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \text{ B) } 17 + a + 1a$$

MATEMÁTICA

C)
17

$$2^{\circ}) 1 \cdot 1 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 2 = . = 7 \cdot 7 - 2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5$$

D) 7

E)
1

dois é uma raiz cúbica, lembrando que: **Exemplo 2** $3 - 2$
 $(2 \cdot 1) \cdot 3$ **04.** (UFMG) O valor de $m = () - 3 - . \acute{e} | \mid 0 \cdot 444 , \dots () \mid_4$
 $2 \cdot 8$ Quando o denominador é do tipo $a - b$ ou $a + b$, e

um dos 2 A) – 21 7

1

B)

$$a_3 - b_3 = (a - b)(a_2 + ab + b_2 \text{ 24 })$$

3

$$a_3 + b_3 = (a + b)(a_2 - ab + b_2 \text{ 5 C) })$$

2

então devemos multiplicar o numerador e o denominador 3 D)

por $a_2 + ab + b_2$ ou $a_2 - ab + b_2$, respectivamente.
Assim: E) 9 8

$\frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \frac{1}{1} + \right) \right]$ **05.** (UFMG) O valor de $=$.
 $\Rightarrow \frac{1}{3} \frac{2}{2} \frac{1}{1} - \frac{2}{2} \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{3} \frac{2}{2} \frac{3}{3} + \frac{2}{2} \frac{1}{1} + \frac{2}{2} \right) \Big|_m = (2^{18} + 3^{15} - 7^{12})(172 + 120 - 4^{12})$ é

$$(A) 6)$$

$$\frac{1}{3} \frac{3}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \frac{1}{1} + = \Rightarrow B) 6^{16}$$

$$\frac{3}{3} \frac{3}{3} \frac{3}{3} \frac{2}{2} \frac{1}{1} - \frac{2}{2} - \frac{1}{1}$$

C)

16

$$\frac{3}{3} \frac{1}{3} \frac{3}{3} D) 18 \ 4 = + \frac{2}{2} \frac{1}{1} +$$

Frente A Módulo 02

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 5 + 3 07.

(UECE) Considerando os números $a = e^2$

01. , $b = 5 - 3$, o valor de $a^2 - b^2$ é (UFMG) Se $a = 10^{-3} 0 01 0 001 10 . , . - 1$, o valor de , em $2 100 0 0001 . ,$

função de a , é A) $5^1 3$

A) $100a$ B) $2^1 3$

B) $10a 3$ C) $2 C) a$

a D) $4 3$

D)

10

08. (UFMG) Se a e b são números reais positivos tais que

02. (PUC Minas) O valor da expressão $y = 8.3 10^{-3}.5.10^{-3}$ é $3 2 1 - (a^2 + b^3)(a^2 - b^3) = -b^6$, pode-se afirmar que a^3 é $3 7$ A) $40 D) 4.10^{-3}$ igual a

B) 40.10^2 E) 40.10^{-3}

C) $40 \text{ A)} 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 - \cdot 3 \cdot 2$

B)
 $\frac{12}{-7}$
 $\frac{3}{3}$
 $\frac{2}{2}$

03. (FUVEST-SP) Qual desses números é igual a 0,064? $\frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{28}{28} \cdot \frac{12}{12}$

A) D) $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$ D) $\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{12}{12} \cdot \frac{80}{80} \cdot \left(\frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} \right) \cdot \left(\frac{1}{1} \right)$
 $\left(\frac{800}{800} \right) \cdot \left(\frac{1}{1} \right)$

B) E) $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$ $\frac{8}{8} \cdot \left(\frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} - \frac{44}{44} \cdot \frac{21}{21} \right)$ E) $\left(\frac{.}{.} \right) \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{8}{8} \right)$
 $\left(\frac{10}{10} \right) \cdot \left(\frac{1}{1} \right)$

$\left(\frac{3}{3} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{y}{y} + \frac{1}{1} \cdot \frac{t}{t} + \frac{3}{3} \cdot \frac{x}{x} - \frac{1}{1} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{t}{t} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \right)$ **09.** (Mackenzie-SP)
 Se $\left(\frac{2}{2} \cdot \frac{k}{k} \cdot \frac{5}{5} \right) \cdot \left(\frac{2}{2} \cdot \frac{k}{k} \cdot \frac{5}{5} \right) = 150$, $\frac{2}{2}$

C) $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{5}$ então k vale $\left(\frac{1}{1} \right)$

04. x A) $\frac{1}{1} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{x}{x}$ (UNIFEI-MG-2008) Sejam $A = \frac{1}{1}$, $B = \frac{3}{3}$ e $C = \frac{6}{6}$. y x y
 B) 2

Então, o produto A.B.C é igual a

C)
 $\frac{3}{3}$

A) $\frac{3}{3} \cdot \frac{y}{y}$

D)
 $\frac{4}{4}$

B) $\frac{3}{3} \cdot \frac{x}{x}$

C)

 $3x$ y **10.** (Cesgranrio) Um número real x , que satisfaz

D) $3xy^{135} < x < y^{139}$, é

05. $\left(105,02, A) 5,7 \right) 1$ (UFPel-RS) O valor da expressão $\div$ é

$$\left(\left| 4 \right| \left| \left| 32 \right| \right| B) 5,8$$

A) 0,125 D) 0,75 C) 6

B) 0,25 E) 1

D)
6,3

C) 0,5

06. 11. $3^1 + 3^1 -$ (FUVEST-SP) Qual é o valor da expressão $+$?
(Cesgranrio) O número de algarismos do produto $3^1 - 3^1 + 5^{17} \cdot 4^9$ é igual a A) 13 A) 17B)
4

B) 18

C) 26 C) 3

D) 34 D) 2

E) 35 E) 12

Potenciação e radiciação

12. 256 (PUC Minas) Se $x = 2^3$ e $y = 2^4$, então $x + y$ é **16**.

$3^2 \cdot 2^3 + 4^2 - 2^2 \cdot 1$ (PUC-Campinas-SP)

Simplificando-se a expressão $()$

igual a $2^3 + 3^2 + 4^2$, obtém-se $()$ 256 +

A) 22 A) 10

B) 2^{12} B) 25

C) 8^{12} C) $10 - 2^{16}$

D) $2 + 8^{12}$ D) $10 + 2^{16}$

E) $160 + 4^{12}$ E) $10 - 4^{16}$

13. 11 **17.** (Cesgranrio) Efetuando e simplificando $1 + x$, (PUC Rio)

Seja $a = 12^{(12-1)}$, $b = 4^{12}$ e $c = 3^{13}$, então $1 + x$ 1 - x

obtemos A) $a < c < b$

A) 1 B) $c < a < b$

$1 - x^2$

C)
a
<
b
<
c

– x D) $b < c < a$ 1 E) $b < a < c$

C) $1 - x$

D) 1 **18.** (UFV-MG) Dada a expressão

$1 + x$

$$\frac{E}{2} \frac{2 \left[\begin{smallmatrix} 43 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]_{6-3} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) - 1}{31 - x} E = | - \div - | - . + 27 + (, L$$

, é **CoRRETo** afirmar que o valor de $2E - 26$ é

14. $\lceil_{-215} \rceil (5) \setminus (\text{UEL-PR})$ Seja $M = \lfloor \cdot (0,6)_{-2} \rfloor$. A) 28 D) -17 $\lfloor \cdot \rfloor$

3 || **MATEMÁTICA** B) 54 E) -35 Efetuando-se as operações, tem-se que

C)
80

A) $M < -5$

3

19. (FUVEST-SP) O **mENoR** número inteiro positivo que

B) $-1 < M < 0$ devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado

1 de um número inteiro positivo é

C) $0 < M < 3$ A) 37

D) 1 4 B) $36 < M < 25$

C)
35

15. (PUC-Campinas-SP) Efetuando-se a expressão adiante, D) 34

obtem-se E) 33

$$3 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 11 + -$$

125 5 25 20. (UNIFESP-SP-2008) Se $0 < a < b$, racionalizando o

denominador, tem-se que:

A) $14 \cdot 2 +$

B) $114 \cdot 5 \cdot 1 \cdot b - a = b \cdot a \cdot a + b - 3$

$$5$$

Assim, o valor da soma

C) $1 \cdot 6$

$$5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + + + \dots + \acute{e}$$

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 999 + 1 \cdot 000$$

$$4$$

D)

5 A) $10^1 \cdot 10 - 1$ D) 100

3 B) $10^1 \cdot 10$ E) 101

E)

5 C) 99

Frente A Módulo 02

SEÇÃO ENEM 03. (Enem–2009 / Anulada) No depósito de uma biblioteca há caixas contendo folhas de papel de 0,1 mm de espessura,

01. e em cada uma delas estão anotados 10 títulos de livros

(Enem–2010) Um dos grandes problemas da poluição dos

diferentes. Essas folhas foram empilhadas formando uma

mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de

torre vertical de 1 m de altura. Qual a representação, em

jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão
potência de 10, correspondente à quantidade de títulos

interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, de livros
registrados nesse empilhamento?

cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões A) 10_2 B) 10_4
C) 10_5 D) 10_6 E) 10_7

(10_7) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas *Veja*

04. (Enem–2003) Dados divulgados pelo Instituto
Nacional de

(ed. 2 055), *Claudia* (ed. 555), *National Geographic* (ed. 93)

Pesquisas Espaciais mostraram o processo de devastação

e *Nova Escola* (ed. 208) (Adaptação). sofrido pela Região Amazônica
entre agosto de 1999

e agosto de 2000. Analisando fotos de satélites, os

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem

especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do

os óleos de frituras através dos encanamentos e

mapa um total de 20 000 quilômetros quadrados de
consomem 1 000 litros de óleo em frituras por semana.

floresta. Um órgão de imprensa noticiou o fato com o
Qual seria, em litros, a quantidade de água potável

seguinte
texto:

contaminada por semana nessa cidade?

A) 10 C) 10^4 E) 10^9

2 “O assustador ritmo de destruição é de um campo de
futebol a cada oito segundos.”

B) 10^3 D) $10^{5,6}$ Considerando que um ano tem aproximadamente 32×10^7 s

02. (Enem–1999) O diagrama seguinte representa a energia área oficial de um campo de futebol é aproximadamente (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da

solar que atinge a Terra e sua utilização na geração 10^{-2} km² (um centésimo de quilômetro quadrado),

de eletricidade. A energia solar é responsável pela as informações apresentadas nessa notícia permitem

manutenção do ciclo da água, pela movimentação do ar, concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano,

e pelo ciclo do carbono que ocorre através da fotossíntese implica a destruição de uma área de

dos vegetais, da decomposição e da respiração dos seres A) 10 000 km², e a comparação dá a ideia de que a

vivos, além da formação de combustíveis fósseis. devastação não é tão grave quanto o dado numérico

nos
indica.

200 bilhões de MW Proveniente do Sol B) 10
000 km², e a comparação dá a ideia de que a
devastação é mais grave do que o dado
numérico

nos
indica.

C) 20 000 km², e a comparação retrata exatamente o

ritmo
da
destruição

Aquecimento Evaporação Aquecimento Absorção D) 40 000 km², e o
autor da notícia exagerou na do solo da água do ar pelas plantas
comparação, dando a falsa impressão de gravidade

a um fenômeno natural.

E) 40 000 km² e, ao chamar atenção para um fato
realmente grave, o autor da notícia exagerou na

Energia potencial Petróleo, gás comparação.

(chuvas) e carvão

GABARITO

Usinas hidroelétricas Usinas termoeletricas **Fixação**

100 000 MW 400 000 MW

Propos

Eletricidade 01. D 05. E 09. C 13. E 17. A

500 000 MW 02. D 06. B 10. C 14. D 18. A

03. C 07. A 11. B 15. D 19. A

De acordo com o diagrama, a humanidade aproveita, na

04. B 08. A 12. A 16. A 20. A

forma de energia elétrica, uma fração da energia recebida

como radiação solar correspondente a **Seção Enem**

A) 4×10^{-9} D) $2,5 \times 10^{-3}$

B) $2,5 \times 10^{-6}$ E) 4×10^{-2} 01. E 02. B 03. C 04. E

C) 4×10^{-4}

16 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Produtos notáveis e fatoração 01 B

PRODUTOS NOTÁVEIS FATORAÇÃO

Seja uma expressão algébrica escrita como uma soma
de

Os produtos notáveis são identidades que podem ser termos. Fatorar essa expressão significa escrevê-la na forma

obtidas de maneira prática. Assim, como são muito frequentes de um produto. Para tanto, existem determinadas técnicas,

no cálculo algébrico, iremos listar os principais: descritas a seguir:

i) Quadrado da soma de dois termos **Fator comum**

$(a + b)_2 = a_2 + 2.a.b + b_2$ Inicialmente, identificamos um termo comum a todas as

ii) parcelas da expressão. Em seguida, colocamos esse termo Quadrado da diferença de dois termos

em
evidência.

$(a - b)_2 = a_2 - 2.a.b + b_2$ **Exemplos**

iii) Produto da soma pela diferença de dois termos

1º) $ab + ac = a(b + c)$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 2º) $24x_3y_2 - 6x_4y + 12x_2y_5 = 6x_2y(4xy - x_2 + 2y_4)_2 - b_2$

iv) Cubo da soma de dois termos

Agrupamento

$(a + b)_3 = a_3 + 3.a_2.b + 3.a.b_2 + b_3$ Às vezes, não é possível identificar, de início, um fator comum

a todas as parcelas da expressão. Nesse caso, formamos dois

v) Cubo da diferença de dois termos

ou mais grupos com um termo comum. Em seguida, colocamos

$(a - b)_3 = a_3 - 3.a_2.b + 3.a.b_2 - b_3$ em evidência um fator comum a todos os grupos.

Exemplos

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 1º) $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

01. 2º) $8x_2 - 4xz - 6xy + 3yz = 4x(2x - z) - 3y(2x - z)$

Desenvolver os seguintes produtos notáveis: $= (2x - z)(4x - 3y)$

$\left(\begin{smallmatrix} 2 & a \end{smallmatrix} \right)$

A) – b EXERCÍCIO RESOLVIDO ||
3 ||

Resolução:

B) $(x + 3y)(x - 3y)$ Fatorar a expressão a **03.** $- 4ba + 3b^2$.

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - 4ab + 3b^2 = (a - b)(a - 3b)$$

Resolução:

Resolução: $= (a - b)(a - 3b)$

$(x + 3y)(x - 3y) = (x)^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2$ **Soma e diferença de cubos**

02. Trata-se de identidades muito úteis em cálculo algébrico. (UNIMEP-SP) A diferença entre o quadrado da soma de

dois números inteiros e a soma de seus quadrados não São elas:

pode ser **i) Soma de cubos**

A) 12 B) 6 C) 4 D) 2 E) 9 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Resolução: ii) Diferença de cubos

Sejam x e y dois números inteiros. Temos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2 = 2xy$ **Exemplo**

Fatorar a expressão $x^3 - 27$.

Como o número obtido é par, temos que o único

valor que não corresponde à expressão é 9. Portanto, **Resolução:**

a alternativa correta é a letra E. $x_3 - 27 = x_3 - 3 = (x - 3)(x_2 + 3x + 9)$

Editora Bernoulli 17

Frente B Módulo 01

Identificação de um produto

notável 04. (Fatec-SP) Sabe-se que $a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40$ e $a - b - c = 10$ e que **a**, **b** e **c** são números reais. Então,

Exemplos o valor de $a + b + c$ é igual a

1º) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 \rightarrow$ Quadrado da soma. A) 1 B) 2 C) 4 D) 10 E) 20

2º) $a_4b_2 - c_6 = (a_2b)_2 - (c_3)_2 = (a_2b + c_3)(a_2b - c_3)$ 15 1

05. (UFV-MG) Sabendo-se que $x + y = e$ e $x - y =$,

$\rightarrow 7$ 14 Produto da soma pela diferença.

qual é o valor da expressão seguinte?

3º) $a_3 - 3a_2 + 3a - 1 = (a - 1)_3 \rightarrow$ Cubo da

diferença. $(x_2 + 2xy y + 2)(x_3 - y_3) (x_2 - xy) \div 2 2 2 2 (x - y) (x + xy y +) 2 x$

Fatoração do trinômio da forma $ax^2 + bx + c$

A) $30x^2 + 60x + 25$ B) $30x^2 + 60x + 25$ C) $30x^2 + 60x + 25$ D) $30x^2 + 60x + 25$ E) $30x^2 + 60x + 25$

Sejam x_1 e x_2 as raízes reais do trinômio $ax^2 + bx + c$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

com $a \neq 0$. Esse trinômio pode ser escrito na forma:

01.

FATToRE:



$$a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{A) } mx^2 + nx - px \quad \text{D) } x^2 - 1$$

OBSERVAÇÃO 3 C) $4m^2 - 32a$ B) $2ax^2 - 32a$ E) $m^2 - mn - 3m + 3n - 6m^2$
F) $x^5 + 2x^4 + x^3$

As raízes podem ser obtidas pela Fórmula de Bháskara:

Exemplo $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **02.** (PUC Minas) O resultado simplificado da expressão $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \div \frac{m - n}{m + n}$ é $\frac{m + n}{m - n}$.

Fatorar a expressão $x^2 - 5x + 6$. A) m^2

Resolução: m n + B) n Cálculo das raízes:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = -2 \text{ e } x = -3$$

Substituindo na forma fatorada, temos $1(x - 2)(x - 3)$.

03.
FAToRE:

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. (UFMG–2006) Sejam x e y números reais não nulos tais

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

que

Então, é correto afirmar que

A) $x^2 - y = 0$ C) $x^2 + y = 0$

B) $x + y^2 = 0$ D) $x - y^2 = 0$

04. FAToRE os seguintes trinômios do 2º grau:

$$\begin{aligned} &A) \\ &x^2 \\ &+ \\ &9x \\ &+ \\ &20 \end{aligned}$$

02. $x^2 + xy + (1 - 1)B) x - 9x + 20$

(UFV-MG) Simplificando-se a expressão $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

$\frac{(y - x)^2}{24} = y^2 - 10y - 24$

em que x e y são números positivos e distintos, obtém-se $\frac{2}{D) t + 12t - 45}$ 1 1 A) B) $2y$ C) xy D) E) $2x$
 $x y$ **05.** FATORAÇÃO:

03. 1 A) $x^3 + 8$ C) $a^3 - 1$ 10 (Mackenzie-SP) Se $a^2 + a^2 =$, então $a + a^{-1}$ vale 3 B) $a^3 + 125$ D) $h^3 - 64$

A) 100 82 82 100 16 1 **06.** Dado $x^2 + 1$ B) C) D) E) $+ = 6$, CALCULE $x + \frac{9}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{9}{x^4} + \frac{9}{x^5} + \frac{9}{x^6} + \frac{9}{x^7} + \frac{9}{x^8} + \frac{9}{x^9} + \frac{9}{x^{10}}$

18 Coleção Estudo

Produtos notáveis e fatoração

07. 13. (UFMG) Se $a^2 + 3b^2 = 1$ (Fatec-SP-2006) Se a, x, y, z são números reais tais que $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, a expressão $(a + b)^3 + (a - b)^3 + a^2 x - 2 y a x a y + - 2 + a$ é igual a $z = \div$, então z é igual a $a^3 - a_2 - + a 1 a_2 - 1$

A) $x y$ A) $2(1 - 3ab^2)$ D) $1 - x y +$ D) $a - 1 a - 1$ B) $2a^2$ E) 2

B) $x^2 y - (x^2 y a -) (+ 1) 1 E) 2 C) a - 1 a - 1 a$

C) $x^4 y + 4x^3 y^2 + 6x^2 y^3 + 4xy^4 + y^5$ **14.** (UFMG) Fatorando-se a expressão $x^5 - y^4 + 2x^3y - 2xy^3$, a + 1 obtém-se

08. A) $(x + y)^2(x - y)^2$ D) $(x + y)^4$ (Unifor-CE) O número real

$$y = 3x_3 + 3x_2 - 6x_1x_2 - 4x_1 + 4B)(x+y)(x-y)^3 \\ E)(x+y)^3(x-y) + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1C)(x_2+y_2) \\ (x-y)^2$$

é equivalente a

15. (PUC Minas) A diferença entre os quadrados de dois números naturais consecutivos é 15. Qual é a soma desses dois números?

A) D) números ímpares, positivos e consecutivos é 40. Esses 2

$$x(x-2)^2(x-1)$$

B) $3x_3 - 2x_2 - 4x_1 + 4$ 3 números pertencem ao intervalo $x_2 + 2x_1 - 4$ E) A) $[3, 9]$ C) $[8, 14]$ E) $[9, 11[$ $x_1(x_2 - 2) \geq 2x_3$

3 B) $[4, 10]$ D) $[10, 15]$

C) $3x - 6x - 21$

4

16. (UFES) CALCULE o valor da expressão:

09. 0 49 , - x₂ (FGV-SP) O valor da expressão $y =$ para $[10_2 + 20_2 + 30_2 + \dots + 100_2] - [9_2 + 19_2 + 29_2 + \dots + 99_2]$ 0 7 , + x

$x = -1,3$ é **17**. (FEI-SP) Simplificando a expressão representada a seguir,

A) 2 B) -2 C) 2,6 D) 1,3 E) -1,3 obtemos

1 1 -

10. a₃ b (UFMG) Sejam **a**, **b** e **c** números reais e positivos tais que (a

b a b₂ + 2 **MATEMÁTICA**

$$ab b - bc - 2 1 1)$$

= . Então, é **CoRRETo** afirmar que a₂ b₂

$$b c + a$$

$$A) a = b_2 + c_2$$

$$2 A) a + b D) a_2 + ab + b_2$$

$$B) a_2 + b_2 E) b - a$$

$$B) b = a + c$$

$$C) b = a_2 + c_2$$

$$2 C) ab$$

D) a = b + c **18.** (FUVEST-SP) Sabendo que **x**, **y** e **z** são números reais e

11. (UFES) O número $N = 2\,002 \cdot 2\,000 - 2\,000 \cdot 1\,998$ é igual a A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7 $(2x + y - z)_2 + (x - y)_2 + (z - 3)_2 = 0$, então **x** + **y** + **z** é igual a

$$A) 2 \cdot 10_6 D) 16 \cdot 10_6$$

B) $4 \cdot 10_6$ E) $32 \cdot 10_6$ **19.** (FGV-SP-2010) Fatorando completamente o polinômio

$$C) 8 \cdot 10_6 x^9 - x \text{ em polinômios e monômios com coeficientes}$$

inteiros, o número de fatores será

12. (UFMG) Simplificando-se a expressão A) 7 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

$1024y + 6xy - 15x - 60$, obtém-se $x - 404 - xy +$ **20.** (PUC Rio) Se $x^2(1 - y)^2 = y^2(1 - x)^2$ $16y$ e $x \neq y$, então $x + y$

A) $3(x + 4)^5 -$ será

$2, y \neq, x \neq 4$ A) $x^2 + y^2$ C) 2 E) $2y(x - 4)^2$

B) 2 B) xy D) $2xy(x + 4)^5 -$, $y \neq$, $x \neq 4$ $3(x - 4)^2$ $\lceil_{11} \rceil_{11} \lfloor_2 - 4 \lceil + 1 \rfloor \lfloor_2 + 4 \rceil$ **21.** (UFMG) A expressão $x^2x^2x^2 + 1$ é igual a $2(x + 4)^5$ C), $y \neq -$, $x \neq 4$ $3(x - 4)^2$ $\lceil_{111} -$ A) $x^4x^2 + 1$ D) $x^2x^2 + 1$ $3(x - 4)^5$ D), $y \neq -$, $x \neq -2$ $2(x + 2)^2$ B) $x^2x^2 - 2 + 1$ E) N.d.a.

E) -35 $\lceil_{11}, y \neq -$, $x \neq -4$ 2

22 C) $x - x^4 + 1$

Editora Bernoulli **19**

Frente B Módulo 01

22. (UFOP-MG-2008) Simplificando a expressão

GABARITO

$$ax^2 - ay^2$$

$$x^2x^2 - 4xy + 3y$$

Fixação

para $x \neq y$, obtém-se

$$a^2 x^2 y^2 (-) a^2 x^2 y^2 \quad 02. D \quad (+) \quad 03. C$$

A) $C) x^2 + 3y^2 x$

$$- 3y$$

04.
C

B) $x^2 y^2 \quad 05. C \quad - x^2 y^2 + D) x^2 + 3y^2 x - 3y^2$ **Propostos**

23. $3x^2 - 2x - 1$ 01. A) $x(m + n - p)$ (PUC Minas) Após simplificar a expressão, $2x^2 - 3x + 1$ B) $2a(x + 4)(x - 4)$ com $x \neq 1$, obtém-se C) $2m^2 (2m - 3)$

A) $2x^2 - 1 \quad 2x^2 + 1$ D) $(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ $3x^2 + 1 \quad 3x^2 - 1$

B) $3x^2 + 1 \quad 2x^2 - 1$ E) $E) (m - n)(m - 3)$

$$2 F) x^3(x + 1)^2 x^2 - 1 \quad 3x^2 - 1$$

C) $3 \quad 02. E \quad x^2 - 1$

$$2x^2 + 1 \quad 03. A) (2a - 3b)(2a + 3b)$$

B)
 $x(x$
 $+$
 $2y)$

$$D) (1 - x - y)(1 + x + y)$$

$$E) (m + 2n)(m - 2n)(m_2 + 4n_2)$$

01. Em Matemática, verifica-se em várias situações uma correspondência entre um modelo algébrico e um modelo geométrico. Como exemplo, observe a figura a seguir:

geométrico. Como exemplo, observe a figura a seguir:

$$b) H) (x - y + 1)(x - y - 1)$$

04.

A)

(x

+

5)

(x

+

4)

b

B)

(x

-

5)

(x

-

4)

$$C) (y - 12)(y + 2)$$

$$D) (t + 15)(t - 3)$$

$$a) 05. A) (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$B) (a + 5)(a^2 - 5a + 25)$$

$$C) (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

$$D) (h - 4)(h^2 + 4h + 16)$$

A área da figura anterior corresponde ao produto notável 07. A 16.
1 090

A) $(a - b)^2$ D) $(a + b)^3$

08. B 17. D

B) $(a + b)^2$ E) $(a - b)^3$ 09. A 18. C

C) $(a + b)(a - b)$ 10. C 19. B

02. 11. E 20. D

Anselmo foi encarregado de calcular o valor da expressão

$A = 4\,000.206 - 4\,000.204^2$, sem utilizar calculadora. Seu 2 12. A
21. D

amigo Fernando recomendou a utilização de técnicas de 13. E 22. C
fatoração, além do conhecimento dos produtos notáveis. 14. E 23. B

Ao seguir o conselho de Fernando, Anselmo obteve **Seção**
Enem

A) 3 280 000 D) 1 680 000

01.
B

B) 360 000 E) 1 240 000 02. A

C) 2 380 000

MÓDULO FRENTE Divisibilidade, MDC e MMC 02 B

DIVISÃO EUCLIDIANA MÚLTIPLOS E DIVISORES DE UM

O algoritmo da divisão de dois números inteiros D e d , **NÚMERO NATURAL**

com $d \neq 0$, é representado da seguinte forma:

Sejam dois números inteiros a e b , em que $b \neq 0$. O número



D é múltiplo de b se existir um número inteiro m tal que:



$$r \mid a = m \cdot b$$

Em que $0 \leq r < |d|$ e $D = qd + r$. Daí, dizemos que:

Portanto, q é o quociente, e r é o resto da divisão de

D por **d**, i) **a** é múltiplo de **b**, ou

e denotamos **D** por dividendo e **d** por divisor. ii) **a** é divisível por **b**, ou

OBSERVAÇÃO iii) **b** é divisor de **a**, ou

iv) **b**
divide
a.

Quando temos o caso em que $r = 0$, então $D = q \cdot d$ e, assim,

dizemos que **D** é um múltiplo de **d** ou **d** é um divisor de **D**. **Número par**

EXERCÍCIO RESOLVIDO É todo número inteiro divisível por 2, ou seja, que pode

ser escrito na forma $2n$, com $n \in \mathbb{N}$. $\square$

01. Considere todas as divisões entre números naturais

Número ímpar

tais que o divisor é 13 e o resto é o triplo do quociente.

Determinar a soma dos possíveis quocientes dessas **É todo** número inteiro que não é divisível por 2, ou seja,

divisões. que pode ser escrito na forma $2n + 1$, em que $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Resolução:

Sejam D o dividendo e q o quociente na situação descrita.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Como o resto é o triplo do quociente, escrevemos:

D 13 Divisibilidade por 2: Um número é divisível por 2 quando

$3q$ seu último algarismo é par. q

Sabemos que o resto deve ser menor do que o divisor.

Divisibilidade por 3: Um número é divisível por 3 quando

Portanto, devemos encontrar todos os valores de q para a soma de seus algarismos é divisível por 3.

os quais $3q < 13$. Assim, temos:

Divisibilidade por 4: Um número é divisível por 4

Para $q = 0 \Rightarrow 3q = 0 < 13$ quando o número formado pelos dois últimos algarismos

Para $q = 1 \Rightarrow 3q = 3 < 13$ é divisível por 4.

Para $q = 2 \Rightarrow 3q = 6 < 13$ **Divisibilidade por 5:** Um número é divisível por 5 quando

Para $q = 3 \Rightarrow 3q = 9 < 13$ o último algarismo é 0 ou 5.

Para $q = 4 \Rightarrow 3q = 12 < 13$ **Divisibilidade por 6:** Um número é divisível por 6 quando

Para $q = 5 \Rightarrow 3q = 15 > 13$ (não convém) é divisível por 2 e

por 3.

Portanto, os possíveis valores de q são 0, 1, 2, 3 e 4.

Divisibilidade por 8: Um número é divisível por 8

A sua soma é igual a 10.

quando o número formado pelos 3 últimos algarismos
é

Resposta: 10 divisível por 8.

Editora Bernoulli **21**

Frente B Módulo 02

Divisibilidade por 9: Um número é divisível por 9
quando OBSERVAÇÕES

a soma de seus algarismos é divisível por 9.

i) Se um número possui mais de dois divisores
positivos,

Divisibilidade por 10: Um número é divisível por
10 ele é chamado de composto.

quando o seu último algarismo é 0. ii) O número 1
não é primo nem composto.

Divisibilidade por 11: Um número é divisível por
11

quando a soma dos algarismos de ordem ímpar

menos a **Reconhecimento de um**
soma dos algarismos de ordem par é um número
divisível **número primo**
por 11.

Divisibilidade por 12: Um número é divisível por 12 Seja n um número inteiro positivo. Para verificarmos se n

quando é divisível por 3 e por 4. é primo, podemos proceder da seguinte forma:

EXERCÍCIO RESOLVIDO i) Calculamos o valor de 1n .

ii) Verificamos se n é divisível por cada um dos números

02. primos menores do que 1n . (EPCAR-MG) Considere o número $m = 488a9b$, em que

b é o algarismo das unidades e a é o algarismo das **iii) Se n não é divisível por nenhum desses números**

centenas. Sabendo-se que m é divisível por 45, o valor da

primos, então n é primo. Caso contrário, n é

soma $a + b$ é

compo

A) 7

B) 9 **Exemplo**

C) 16

Verificar
se 97
é
primo.

D) 18

Resolução: ${}^197 = 9,85$ (aproximadamente)

Um número é divisível por 45 se esse número é divisível Os
primos menores do que 197 são 2, 3, 5 e 7.

por 9 e por 5. Para que **m** seja divisível por 5, temos de

considerar duas possibilidades: $b = 0$ ou $b = 5$ Observe que 97
não é divisível por nenhum desses

i) Para $b = 0$, temos $m = 488a90$. Porém, **m** é divisível
números, ou seja, 97 é primo.

também por 9, ou seja, a soma

$$4 + 8 + 8 + a + 9 + 0 = 29 + a$$

deve ser divisível por 9. O múltiplo de 9 mais próximo

**DECOMPOSIÇÃO EM
FATORES**

de 29 é o número 36. Para

que a soma seja igual a
PRIMOS esse número, temos $a = 7$.

ii) Para $b = 5$, temos $m = 488a95$. Porém, m é divisível

também por 9, ou seja, a soma Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou pode

$4 + 8 + 8 + a + 9 + 5 = 34 + a$ ser escrito como um produto de fatores primos. Esse produto

deve ser divisível por 9. Como no caso anterior, é obtido pela chamada decomposição em fatores primos ou,

a soma deve ser igual a 36. Portanto, $a = 2$.

simplesmente, fatoração do número.

Em ambos os casos, temos $a + b = 7$.

Exemplo

Resposta: Letra A

Decompor em fatores primos o número 840.

NÚMEROS PRIMOS 840 2

420 2

Um número inteiro positivo é dito primo quando admite

210 2

exatamente dois divisores positivos: o número 1 e

ele mesmo.

35 5

Sendo **P** o conjunto dos números primos positivos, temos: 7 7

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\} \quad 1$$

$$840 = 2_3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

22 Coleção Estudo

Divisibilidade, MDC e MMC

CÁLCULO DA QUANTIDADE DE MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

DIVISORES DE UM NÚMERO (MMC)

NATURAL O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números

naturais é o menor número natural, excluindo o zero, que

i) Decompõe-se o número em fatores primos. é

múltiplo desses números.

ii) Tomam-se os expoentes de cada fator primo, e soma-se Assim, para se obter o MMC entre dois ou mais números

1 a cada um deles.

naturais,
deve-
se:

iii) Multiplicam-se os resultados anteriores. O produto é

i) Decompô-los em fatores primos.

a quantidade de divisores positivos do número.

ii) Tomar todos os fatores primos comuns e não comuns

Exemplo

com seus maiores expoentes.

Determinar a quantidade de divisores de 360.

iii) Efetuar o produto desses fatores.

360 2

Exemplo

180 2

90 2 Calcular o mínimo múltiplo comum dos números 90, 96

45 3 e 54.

$$15 \cdot 3_2 \cdot 90 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 96 = 2_5 \cdot 3 \cdot 54 = 2 \cdot 3_3$$

5 5

1 2₃ · 3₂ · 5₁ Daí, temos que o MMC (90, 96, 54) = 2₅ · 3₃ · 5 = 4 320.

Assim, a quantidade de divisores é: OBSERVAÇÃO

$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Podemos também calcular o MMC de dois ou mais números

MATEMÁTICA

através da chamada decomposição simultânea.

MÁXIMO DIVISOR COMUM Refazendo o exemplo anterior, temos:

(MDC) 90, 96, 54 2

45,
48,
27 2

O máximo divisor comum de dois ou mais números 45, 24, 27 2

naturais é o maior número que é divisor de todos esses 45, 12, 27 2

números. Para se obter o MDC entre dois ou mais números, 45, 6, 27 2

deve-se: 45, 3, 27 3

i) Decompô-los em fatores primos. 15, 1, 9 3

ii) 5, 1, 3 3 Tomar os fatores primos comuns com seus menores

expoentes. 5, 1, 1 5

iii) 1, 1, 1 MMC (90, 96, 54) = $2_5 \cdot 3_3 \cdot 5 = 4 \ 320$
Efetuar o produto desses fatores.

Exemplo

Calcular o máximo divisor comum dos números 90,
96 **RELAÇÃO ENTRE O MMC**

e 54. **E O MDC** $90 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \ 96 = 2 \cdot 3 \ 54 = 2 \cdot 3_3$

Daí, temos que $\text{MDC} (90, 96, 54) = 2 \cdot 3 = 6$.

Sendo **a** e **b** dois números naturais, temos:

OBSERVAÇÃO

Dois números são ditos primos entre si quando o
MDC

$$[\text{MMC}(a, b)] \cdot [\text{MDC}(a, b)] = a \cdot b$$

entre eles é igual a 1.

Editora Bernoulli **23**

Frente B Módulo 02

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS $x = 8q + 6 \Rightarrow_3$

$$\begin{array}{r} x \\ + \\ 2 \\ = \\ 8q_3 \\ + \\ 6 \\ + \\ 2 \\ \Rightarrow \end{array}$$

03. Determinar a soma dos algarismos do menor número $x + 2 = 8q + 8 \Rightarrow_3$

natural que, quando dividido por 2, 3, 5 ou 9, deixa $x + 2 = 8(q_3 + 1)$

sempre resto 1.

Assim, como o resto é zero, então $x + 2$ é múltiplo de 8.

Resolução:

Como queremos o menor número x que satisfaz essas

Seja x o número procurado. Logo, temos: condições, então temos:

$$x + 2 = \text{MMC}(5, 7, 8) = 280 \Rightarrow x = 278 \quad x \equiv 3 \pmod{5} \quad x \equiv 9 \pmod{9}$$

Em que q_1, q_2, q_3 e q_4 são os quocientes de cada uma dessas **05**. Em um terminal rodoviário, sabe-se que:

divisões. Podemos escrevê-las da seguinte forma:

● a cada 50 minutos parte um ônibus da linha Amarela;

$x = 2q + 1 \Rightarrow x - 1 = 2q \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 2 _{1 1} ● a cada 30 minutos parte um ônibus da linha Verde;

$x = 3q + 1 \Rightarrow x - 1 = 3q \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 3 _{2 2} ● a cada 40 minutos parte um ônibus da linha Branca.

$x = 5q + 1 \Rightarrow x - 1 = 5q \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 5 _{3 3} Considerando-se que às 8h houve uma partida simultânea

$x = 9q$ de um ônibus de cada uma das três linhas, e considerando $+ 1 \Rightarrow x - 1 = 9q \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 9 _{4 4}

que o quadro de horários não sofrerá alterações,

Portanto, $x - 1$ é um múltiplo comum de 2, 3, 5 e 9. determinar a hora exata em que a próxima partida

Como queremos o menor número x que satisfaz essas simultânea ocorrerá.

condições, então temos:

Resolução

$$x - 1 = \text{MMC}(2, 3, 5, 9) = 90 \Rightarrow x - 1 = 90 \Rightarrow x = 91$$

O tempo da próxima partida simultânea deve ser

A soma dos algarismos de x é 10.

igual ao mínimo múltiplo comum dos tempos de

Resposta: 10 partida de cada uma das linhas. Assim, temos que

$$\text{MMC}(50, 30, 40) = 600 \text{ minutos} = 10 \text{ horas.}$$

04. Determinar o menor número natural que deixa restos Portanto, a próxima partida simultânea ocorrerá às

3, 5 e 6 quando dividido por 5, 7 e 8, respectivamente.

8h
+
10h
=
18
horas.

Resolução:

Resposta:
18
horas

Seja x o número procurado. Daí, temos:

06. Uma sala retangular de dimensões 36 m e 40 m deverá

$x \ 5 \ x \ 7 \ x \ 8$

3 q 5 q 6 q₁ ter o seu piso preenchido com placas idênticas, de formato

_{2 3} quadrado e dimensões inteiras. Qual é o menor número

Em que q_1, q_2, q_3 são os quocientes de cada uma dessas de placas quadradas necessário para revestir esse piso _{1 2 3}

divisões. Logo, temos: nas condições dadas, de maneira que não haja cortes ou

$x = 5q_1$ sobras de material? $q_1 + 3 \Rightarrow$

$x + 2 = 5q_1 + 3 + 2 \Rightarrow$ **Resolução:**

$x + 2 = 5q_1 + 5 \Rightarrow$ ₁ Seja x a medida do lado de cada placa quadrada. Observe

$x + 2 = 5(q_1 + 1)$ que, para que não haja sobra de material, a medida x

Assim, como o resto é zero, então $x + 2$ é múltiplo de 5. deve ser

um divisor de 36 e de 40. Para que tenhamos o

$x = 7q$ menor número de placas, é necessário que a medida $x + 2 + 5$
 $\Rightarrow$

$x + 2 = 7q + 5 + 2 \Rightarrow$ O número de placas é obtido dividindo-se a área total da seja a maior possível. Portanto, $x = \text{MDC}(36, 40) = 4$ m.

$x + 2 = 7q + 7 \Rightarrow$ sala pela área de uma das placas quadradas.

$$x + 2 = 7(q + 1)$$

Assim, como o resto é zero, então $x + 2$ é múltiplo de 7. Logo: $36 : 40 = 90$ placas

4
4
.

24 Coleção Estudo

Divisibilidade, MDC e MMC

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FEI-SP) Em uma sala retangular de piso plano nas dimensões 8,80 m por 7,60 m, deseja-se colocar ladrilhos 3 variedades de uma mesma planta, V_1 , V_2 e V_3 , que se

quadrados iguais, sem necessidade de recortar nenhuma desenvolvem cada uma a seu tempo, de acordo com a

desenvolvem cada uma a seu tempo, de acordo com a

peça. A medida **máxima** do lado de cada ladrilho é tabela a seguir. Plantando-se as 3 variedades no mesmo dia,

A) 10 cm. D) 40 cm. confiando-se na exatidão da tabela, não ocorrendo nenhum

B) 20 cm. fato que modifique os critérios da experiência tabulada e E) 50 cm.

C) 30 cm. levando-se em conta que, a cada dia de colheita, outra semente da mesma variedade será plantada, o número

02. mínimo de semanas necessário para que a colheita das (UFMG) Entre algumas famílias de um bairro, foi

distribuído um total de 144 cadernos, 192 lápis e 216 três variedades ocorra simultaneamente será

recebessem o mesmo número de cadernos, o mesmo **germinação única colheita Variedade (em semanas, (em semanas, (em semanas, após a após a** número de lápis e o mesmo número de borrachas, sem número possível de famílias fosse contemplado e todas **Tempo de Tempo de Tempo para floração** borrachas. Essa distribuição foi feita de modo que o maior

após o plantio) germinação) floração)

haver sobra de qualquer material. Nesse caso, o número

de cadernos que cada família ganhou foi V_1 4 3 1

A) 4 C) 8

V_2 2 3 1

B) 6 D) 9

V_3 1 2 1

03. (UFC-CE-2009) O expoente do número 3 na decomposição

por fatores primos positivos do número natural $10_{63} - 10_{61}$ A) 24 D) 12

é igual a

B) 18 E) 8 **MATEMÁTICA**

A) 6

C)
16

B) 5

C) 4 **02.** (UFMG) Seja N o menor número inteiro pelo qual se deve

D) 3 multiplicar 2 520 que o resultado seja o quadrado de um

E) 2 número natural. Então, a soma dos algarismos de N é

04. (UFMG) No sítio de Paulo, a colheita de laranjas ficou entre B) 7
A) 9 C) 8 D) 10

500 e 1 500 unidades. Se essas laranjas fossem colocadas

em sacos com 50 unidades cada um, sobrariam 12
laranjas e, **03.** (UFJF-MG-2009) Em uma rodovia, a partir do

se fossem colocadas em sacos com 36 unidades cada um, quilômetro
40, a cada 3 km há postos de telefones SOS.

também sobrariam 12 laranjas. Assim sendo, quantas Ocorreu um
acidente no quilômetro 750 dessa rodovia.

laranjas sobrariam se elas fossem colocadas em sacos A distância do
telefone SOS mais próximo do local do

com 35 unidades cada um? acidente é

A) 4 A) 0,6 km. D) 1,2 km.

B) 6 B) 0,8 km. E) 1,4 km.

C) 7 C) 1 km.

D) 2

04. (UNIFESP-SP-2006) Um número inteiro positivo m

05. (UFU-MG) Considere a e b dois números inteiros, tais que dividido por 15 dá resto 7. A soma dos restos das divisões

$a - b = 23$, sendo $b > 0$. Sabendo-se que, na divisão de m por 3 e por 5 é

a por b , o quociente é 8 e o resto é o maior valor possível A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

nessa divisão, então $a + b$ é igual a

A) 29 **05.** (UFU-MG) Se o máximo divisor comum entre os números

B) 26 144 e $(30)_p$ é 36, em que p é um inteiro positivo, então

C) 32 o expoente p é igual a

D) 36 A) 1 B) 3 C) 4 D) 2

Editora Bernoulli 25

Frente B Módulo 02

06. (UFOP-MG-2006) O **mínimo** valor de m para que **14.** (UFES) Deseja-se acondicionar 2 004 bolas de tênis

$2_m \times 162$ seja divisível por 72 é em caixas de mesma capacidade, de modo que cada

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 caixa contenha o número de bolas determinado por sua

capacidade. Dispõe-se de vários tipos de caixas, desde

07. o tipo com capacidade para apenas uma bola até o tipo (UFV-

MG) Seja $x = 3\,600$. Se p é o número de divisores

naturais de x , e q é o número de divisores naturais pares com capacidade para todas as bolas. Nessas condições,

de x , então é **CoRRETo** afirmar que o número de todos os possíveis tipos de caixas para

acondicionar as 2 004 bolas é

A) $p = 45$ e $q = 36$ D) $p = 45$ e $q = 12$

A) 12 B) 15 C) 24 D) 25 E) 30

B) $p = 36$ e $q = 45$ E) $p = 16$ e $q = 34$

C) $p = 16$ e $q = 10$ ⁶⁵ **15.** (UFU-MG) Desenvolvendo o número $10 - 92$, iremos

encontrar todos os algarismos que o compõem. Assim,

08. (Unicamp-SP) Uma sala retangular medindo 3 m por pode-se afirmar que a soma desses algarismos é igual a

4,25 m deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados

A) 575 B) 573 C) 566 D) 585

iguais. Supondo que não haja espaço entre ladrilhos

vizinhos, pergunta-se: **16.** (PUC Minas) O **maior** número que divide 200 e 250,

A) Qual deve ser a dimensão máxima, em centímetros, deixando como restos 15 e 28, respectivamente, é

de cada um desses ladrilhos para que a sala possa

A) 37 B) 47 C) 57 D) 67

ser ladrilhada sem cortar nenhum ladrilho?

B) Quantos desses mesmos ladrilhos são necessários?

17. (FMC-RJ) Indique o número inteiro compreendido entre

387 e 429 que, ao ser dividido por 3, 5 e 7, deixa sempre

09. (UFU-MG) Dos divisores positivos de 1 800, quantos são resto 2.

múltiplos de 8? A) 436 B) 418 C) 398 D) 422

A) 4 B) 9 C) 10 D) 8

18. (UFU-MG) Entre os números naturais compreendidos

10. (Unicamp-SP) Sejam **a** e **b** dois números inteiros positivos entre 1 e 150, selecione todos aqueles que tenham

tais que $\text{MDC}(a, b) = 5$ e o $\text{MMC}(a, b) = 105$. exatamente três divisores positivos. A soma dos números

A) Qual é o valor de **b**, se $a = 35$? selecionados é igual a

A) 87 B) 208 C) 121 D) 464

B) **ENCoNTRE** todos os valores possíveis para (a, b) .

11. (FCMMG) Seja **x** um número inteiro positivo. aviões foram vistos sobrevoando juntos certa cidade. **19.** (PUC Minas) No dia 31 de julho do ano 2001, três

Sabendo-se que **x** satisfaz às seguintes condições:

Um dos aviões sobrevoaram essa cidade de quatro em
é múltiplo de 3; deixa resto 1 se dividido por 2; por 5 ou

quatro dias, outro de doze em doze dias, e o terceiro, de
por 7; o menor valor de **x**, que satisfaz a essas condições,

quinze em quinze dias. O próximo dia, do ano de 2001, em
pertence ao intervalo

que os aviões sobrevoaram juntos aquela cidade foi o dia

A) [100, 180] C) [280, 360]

A) 01 de outubro. C) 29 de setembro.

B) [190, 270] D) [370, 450]

B) 02 de outubro. D) 30 de setembro.

12. (UFU-MG) Considere os números naturais ímpares **20.** (UFMG) Sejam **a**, **b**, **c** números primos distintos, em

1, 3, 5,..., 2 001. Se $x = 1.3.5... .2\ 001$. O algarismo que que $a > b$. O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo

ocupa a ordem das unidades de **x** é comum de $m = a_2bc_2$ e $n = ab_2$ são, respectivamente,

A) 7 C) 5 21 e 1 764. Pode-se afirmar que $a + b + c$ é igual a

B) 3 D) 1 A) 9 D) 42

B) 10 E) 62

13. (UFMG) Considere-se o conjunto **m** de todos os números C) 12

inteiros formados por exatamente três algarismos iguais.

Pode-se afirmar que todo $n \in M$ é múltiplo de **21.**

(UFU-MG) Sabendo-se que $302\ 400 = 64.27.25.7$, pode-se

A) 5 D) 17 concluir que o número de divisores de 302 400 que são

B) 7 E) 3 múltiplos de 6 é igual a

C) 13 A) 36 B) 18 C) 168 D) 108

26 Coleção Estudo

Divisibilidade, MDC e MMC

22. (FUVEST-SP) Uma senhora tinha entre trinta e quarenta **29.**

(PUC Minas) Os números naturais **a** e **b** são tais que

ações de uma empresa para dividir igualmente entre $ab = 2_3.3_2 a .5$ e $= 0,4$. O máximo divisor comum de **b** todos os seus netos. Num ano, quando tinha 3 netos, se **a** e **b** é a partilha fosse feita, deixaria 1 ação

sobrando. No ano

A) 6 D) 12

seguinte, nasceu mais um neto e, ao dividir igualmente entre os quatro netos o mesmo número de ações, ela B) 8 E) 30 observou que sobrariam 3 ações. Nesta última situação, C) 10 quantas ações receberá cada neto?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10 **30.** (UERJ) Dois sinais luminosos fecham juntos num

determinado instante. Um deles permanece 10 segundos

23. fechado e 40 segundos aberto, enquanto o outro

(UFMG) O produto de um número inteiro positivo “a” de permanece 10 segundos fechado e 30 segundos aberto. três algarismos por 3 é um número terminado em 721.

O número mínimo de segundos necessários, a partir A soma dos algarismos de “a” é

daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar

A) 12 D) 15

juntos outra vez é

B) 13 E) 16

A) 150 C) 190

C) 14

B) 160 D) 200

24. (UFU-MG) O número de três algarismos $2m3$ é somado ao **31.**

(UFU-MG) Uma empresa fabricou 9 000 peças do tipo A,

número 326, resultando no número de três algarismos $5n9$.

2 700 peças do tipo **B** e 4 050 peças do tipo **C**. Sabendo-se

Sabendo-se que $5n9$ é divisível por 9, $m + n$ é igual a que a avaliação de todas as peças pelo controle de

A) 2 C) 4 qualidade foi realizada pelo menor número possível de

B) 6 D) 8 funcionários e que cada funcionário avaliou apenas um

tipo de peça e o mesmo número de peças que todos

25. (UFMG) Considerem-se todas as divisões de números os demais, qual o número de funcionários utilizados no

inteiros positivos por 17, cujo resto é igual ao quadrado controle de qualidade? **MATEMÁTICA**

do quociente. A soma dos quocientes dessas divisões é

A) 10 **32.** (UFPE) Uma escola deverá distribuir um total de 1 260 bolas D) $1 + 2 + \dots + 17$

B) 17 E) $1_2 + 2_2 + \dots + 17_2$ de gude amarelas e 9 072 bolas de gude verdes entre alguns

C) 17_2 de seus alunos. Cada aluno contemplado receberá o mesmo

número de bolas amarelas e o mesmo número de bolas

26. verdes. Se a escola possui 300 alunos e o maior número

(UFMG) Na divisão de dois inteiros positivos, o quociente

possível de alunos da escola deverá ser contemplado, qual

é 16 e o resto é o maior possível. Se a soma do dividendo

e do divisor é 125, o resto é o total de bolas que cada aluno contemplado receberá?

A) 38 D) 41

A) 4 D) 7

B) 5 E) 8

C)
40

C) 6

33. (FUVEST-SP) Maria quer cobrir o piso de sua sala com**27.** (UFU-MG) Considere a sequência ordenada de letras

lajotas quadradas, todas com lado de mesma medida

AMOROMAMOROMAMOROM..., em que se observa que a

inteira, em centímetros. A sala é retangular, de lados 2 m

posição 1 é ocupada pela letra **A**, a posição 2 pela letra

e 5 m. Os lados das lajotas devem ser paralelos aos lados

m e assim por diante. Segundo esse padrão, podemos

da sala, devendo ser utilizadas somente lajotas inteiras.

afirmar que a letra que ocupa a posição 2 001 é

Quais são os possíveis valores do lado das lajotas?

A) O. C) A.

B) M. D) R. **34.** (FUVEST-SP-2008) Sabendo que os anos bissextos

são os múltiplos de 4 e que o primeiro dia de 2007 foi

28. (Cesgranrio) Seja **n** um número inteiro positivo tal que $2n$ segunda-feira, o próximo ano a começar também em umaé divisor de 150. O número de valores distintos de **n** é segunda-feira será

A) 3 D) 6 A) 2012 D) 2018

B) 4 E) 8 B) 2014 E) 2020

C) 5 C) 2016

Editora Bernoulli 27

Frente B Módulo 02

SEÇÃO ENEM

GABARITO

01. (Enem–2005) Os números de identificação utilizados

Fixação

no cotidiano (de contas bancárias, de CPF, de Carteira de Identidade, etc.) usualmente possuem um dígito de 01. D
verificação, normalmente representado após o hífen, 02. B
como em 17 326-9. Esse dígito adicional tem a finalidade 03. E
de evitar erros no preenchimento ou digitação de 04. D
documentos. 05. A

Um dos métodos usados para gerar esse dígito utiliza os

Propostos

seguintes passos: 01. A

- Multiplica-se o último algarismo do número por 1, 02. B
o penúltimo por 2, o antepenúltimo por 1, e assim 03. C

por diante, sempre alternando multiplicações por

04.

B

1 e por 2;

05.

D

- Soma-se 1 a cada um dos resultados dessas 06. C

multiplicações que for maior do que ou igual a 10;

07.

A

- Somam-se os resultados obtidos; 08. A) 25 cm
- Calcula-se o resto da divisão dessa soma por 10, B) 204 ladrilhos obtendo-se assim o dígito verificador. 09. B

O dígito de verificação fornecido pelo processo anterior 10. A) 15 para o número 24 685 é B) (15, 35); (35, 15); (5, 105); (105, 5)

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8 11. A

12.

C

02. (Enem–2009) Para cada indivíduo, a sua inscrição no 13. E

Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) é composto por um 14. A

número de 9 algarismos e outro número de 2 algarismos, 15. A

na forma $d_1 d_2 \dots d_9 d_{10} d_{11}$, em que os dígitos d_1 e d_{10} são denominados 16. A $d_1 d_2 d_3 d_4$

dígitos verificadores. Os dígitos verificadores são 17. D

calculados, a partir da esquerda, da seguinte maneira: 18. B

os 9 primeiros algarismos são multiplicados pela 19. C

sequência 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 (o primeiro por 10, 20. C

o segundo por 9, e assim sucessivamente); em seguida, 21. D
calcula-se o resto r da divisão da soma dos resultados 22. B
das multiplicações por 11, e se esse resto r for 0 ou 1, 23. E
 d é zero, caso contrário, $d = (11 - r)$. O dígito d é 24. B ₁₁₂
calculado pela mesma regra, na qual os números a serem 25. A
multiplicados pela sequência dada são contados a partir 26. C
do segundo algarismo, sendo d_1 o último algarismo, 27. A
isto é, d é zero se o resto s da divisão por 11 das 28. D ₂
somas das multiplicações for 0 ou 1, caso contrário, 29. A
 $d_2 = (11 - s)$. Suponha que João tenha perdido seus 30. D
documentos, inclusive o cartão de CPF e, ao dar queixa 31. 35
da perda na delegacia, não conseguisse lembrar quais 32. D
eram os dígitos verificadores, recordando-se apenas que 33. 1 cm, 2
cm, 4 cm, 5 cm, 10 cm, 20 cm, 25 cm,
os nove primeiros algarismos eram 123 456 789. Neste 50 cm, 100
cm

caso, os dígitos verificadores d 34. D_1 e d_2 esquecidos são,

respectivamente, **Seção Enem**

A) 0 e 9 D) 9 e 1 01. E

B) 1 e 4 E) 0 e 1 02. A

C) 1 e 7

conjuntos 01 C

Entendemos a ideia de conjuntos como qualquer coleção Sendo **A** e **B** conjuntos, tem-se que $A \subset B$ e $B \subset A$ se,

ou grupo de objetos ou símbolos (os quais chamamos de e somente se, $A = B$. elementos).

OBSERVAÇÃO

Para indicar que **x** é um elemento de **A**, escrevemos $x \in A$

(lê-se **x** pertence a **A**). Se **x** não pertence a **A**, indicamos **i**) Qualquer que seja o conjunto **A**, tem-se que $A \not\subset A$. é subconjunto de **A**, pois todo elemento de **A** é

As principais maneiras de representarmos um conjunto são: elemento de **A**.

i) Por meio da enumeração de seus elementos. **ii**) Qualquer que seja o conjunto **A**, tem-se que o conjunto

Exemplo vazio é subconjunto de **A**, pois, se não o fosse, deveria

existir pelo menos um elemento do conjunto vazio que

O conjunto dos dias da semana é:

não pertencesse a **A** (que é um absurdo).

$S = \{\text{domingo, segunda, terça, quarta, quinta,}$

sexta,

sábado} **Exemplo**

ii) Por meio de uma propriedade comum aos seus
Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \{3, 4\}\}$, classifi car
em

elementos. verdadeira V ou falsa F cada uma das
seguintes proposições.

Exemplo A) $() A$ possui 4 elementos.

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 7\}$ que corresponde ao
conjunto B) $() 1 \in A$ e $2 \in A$ $A = \{0, 1, 2, 3, 4,$
 $5, 6\}$.

C) $()$
 $\{1, 2\}$
 $\subset A$

iii) Por meio do Diagrama de Venn (John Venn,
lógico

inglês, 1834-1923). D) $() \{3, 4\} \subset A$

Exemplo E) $() \{\{3, 4\}\} \subset A$

0 2 A O conjunto A possui 4 elementos, a saber, os
números 4 6 1, 2 e 3 e o conjunto binário $\{3, 4\}$;
portanto, tem-se que

1 5 $1 \in A, 2 \in A, 3 \in A$ e $\{3, 4\} \in A$. 3

$\{1, 2\} \subset A$, pois 1 e 2 são elementos de A.

Admite-se a existência de conjuntos com um só

elemento $\{3, 4\} \notin A$, pois 4 não é elemento de A .

(conjuntos unitários) e de um conjunto sem elementos, $\{\{3, 4\}\} \subset A$, pois $\{3, 4\}$ é elemento de A .

denominado conjunto vazio, e representado por $\emptyset$ ou $\{\}$. Assim, a única proposição falsa é a letra **D**.

SUBCONJUNTOS

Dados os conjuntos A e B , dizemos que B é subconjunto de **CONJUNTO DAS PARTES**

A se, e somente se, todo elemento de B for elemento de A .

Sendo A um conjunto finito, com n elementos, prova-se



Notação: $B \subset A$ que o número de subconjuntos de A é 2^n . A (lê-se B está contido em A)



O conjunto de todos os subconjuntos de A é chamado o

conjunto das partes de A , e será indicado por $P(A)$.

Dado o conjunto $A = \{x, y, z\}$, obter o conjunto das
Diagrama de Venn partes de A .

Editora Bernoulli 29

Frente C Módulo 01

Resolução: Propriedades

Como o número de elementos de A é 3, conclui-se
que

o número de seus subconjuntos é $2_3 = 8$. Os
subconjuntos $A \cap B = B \cap A$ de A são:

B
 $\subset$
 A
 $\Leftrightarrow$
 A
 $\cap$
 B
 $=$
 B

$\emptyset; \{x\}; \{y\}; \{z\}; \{x, y\}; \{x, z\}; \{y, z\}; A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

Assim, o conjunto das partes de A é: $(A \cap B) \cap C = A \cap$
 $(B \cap C) = A \cap B \cap C$

$P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, A\}$ (A

$$\cap B) \subset (A \cup B)$$

UNIÃO DIFERENÇA

Dados os conjuntos **A** e **B** em um universo **U**, chama-se

Dados os conjuntos **A** e **B** em um universo **U**, chama-se

diferença entre **A** e **B**, nessa ordem, ao conjunto dos união (ou reunião) de **A** com **B** ao conjunto dos elementos

elementos de **A** que não são elementos de **B**.

que pertencem a, pelo menos, um dos conjuntos **A** ou **B**.

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

U

U A B

A B

Exemplos

Exemplos 1º) $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5\} = \{1, 2, 3\}$

1º) 2º) $\{1, 2\} - \emptyset = \{1, 2\}$ $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{4, 5\}$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad 3^{\circ}) \emptyset - \{1, 2\} = \emptyset$$

$$2^{\circ}) \{1, 2, 3, 4\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3, 4\}$$

Propriedades Propriedades

$$(A - B) \subset A$$



$$A - \emptyset = A \quad A \cup B = B \cup A$$



$$B - A = \emptyset \subset A \Rightarrow A \cup B = A$$



$$A - (A \cap B) = A - B \quad A \cup \emptyset = A$$



$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \quad \textbf{Exemplo}$$



Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$,



obter os conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$.



INTERSEÇÃO *Resolução:* $A \cap B = \{3, 4\}$



$$\begin{aligned} A \cup B \\ &= \{1, \\ &2, 3, \\ &4, 5, \\ &6, 7\} \end{aligned}$$



Dados os conjuntos **A** e **B** em um universo **U**, chama-se



$$A - B \\ = \{1, \\ 2\}$$

interseção de **A** com **B** ao conjunto dos elementos comuns $B - A = \{5, 6, 7\}$ a **A** e **B**.

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

U

A B

01. Numa pesquisa escolar a respeito da leitura dos jornais

A
e
B,
constatou
se
que:

i) 280 alunos leem somente um dos jornais.

ii)
230
leem
o
jornal
B.

Exemplos iii) 100 leem os dois.

1º) $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 5\} = \{4\}$ iv) 200 não leem o jornal

A.

2º) $\{1, 2, 3, 4\} \cap \emptyset = \emptyset$ Quantos alunos foram entrevistados?

30 Coleção Estudo

Teoria dos conjuntos

Resolução: LEIS DE MORGAN

w U

Podemos verificar, através do Diagrama de Venn,

A B as seguintes igualdades:

$$x \ y \ z \ c \ i) (A \cup B) = A_c \cap B_c$$

U

A B

Sendo x, y, z e w o número de elementos de cada região

indicada no diagrama anterior, segue que:

$$\begin{aligned} & \{ \{ y \ z \} + = 230 \} \{ \{ x \ z \} 280 \} + = \\ & () \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & | y = 100 \text{ () } 3 \text{ ii) } (A \cap B)_c = A_c \cup B_c | \\ & z + w = 200 \text{ () } 4 | \end{aligned}$$

Das equações (3) e (2), tem-se que $z = 130$. u

A B

Substituindo z por 130 nas equações (1) e (4),
obtêm-se,

respectivamente, os valores de x e w : $x = 150$ e $w = 70$

O número total de alunos que foram entrevistados é:

$$x + y + z + w = 450$$

COMPLEMENTAR EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Chamemos de conjunto universo U o conjunto que
MATEMÁTICA

contém todos os elementos do contexto no qual
estamos **01.** (UFV-MG) Fez-se, em uma população, uma pesquisa
de

trabalhando. No Diagrama de Venn a seguir,
representamos mercado sobre o consumo de sabão em pó de três
marcas

o complementar de A em relação ao universo
(indicado distintas: A , B e C . Em relação à população consultada

por C_A ou A). e com o auxílio dos resultados da pesquisa tabelados

U

A U a seguir:

A

marcas A e A e B e A,B Nenhuma A B C B C C e C delas

consumidores Nº de 109 203 162 25 28 41 5 115

Dados os conjuntos A e B, com $B \subset A$, chama-se de complementar de B em relação a A o conjunto:

B DETERmine

$$C_A = \{x \in A \text{ e } x \notin B\} = A - B$$

A) o número de pessoas consultadas.

B A B) o número de pessoas que não consomem as marcas

A
ou
C.

C) o número de pessoas que consomem pelo menos duas

marcas

D) a porcentagem de pessoas que consomem as marcas

Exemplo A e B, mas não consomem a marca C.

Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4\}$. O

complementar de E) a porcentagem de pessoas que consomem apenas a

B em relação a **A** é $C_B = \{1, 3\}$. marca **C**.

A

Editora Bernoulli **31**

Frente C Módulo 01

02. (PUC Rio–2008) Um trem viajava com 242 passageiros, **05.**
(UFPE) Considere o seguinte “Diagrama de Venn”, que

dos quais: representa graficamente os conjuntos **A**, **B** e **C**, em que

U
representa
o
universo.

– 96 eram brasileiros,

– 64 eram homens, **A** **U**

B

– 47 eram fumantes,

– 51 eram homens brasileiros,

– 25 eram homens fumantes, **C**

– 36 eram brasileiros fumantes, Assinale, entre as alternativas a seguir, o conjunto que é

representado pela área tracejada no diagrama, em que

– 20 eram homens brasileiros fumantes.

a barra () representa o complementar do conjunto em

CALCULE relação a U.

A) o número de mulheres brasileiras não fumantes; A) $A \cap B \cap C$ D) $A \cap B \cap C$

B) o número de homens fumantes não brasileiros; B) $A \cap B \cap C$ E) $A \cup B \cup C$

C) o número de mulheres não brasileiras, não fumantes. C) $A \cup B \cup C$

03. (UFOP-MG–2008) Três frutas são consumidas por um

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

grupo de 400 pessoas: laranja, banana e maçã. Dessas

pessoas, 185 consomem laranja, 125 consomem
laranja e **01.** (UFES) Se $A = \{-2, 3, m, 8, 15\}$ e $B = \{3, 5, n, 10, 13\}$

banana, 130 consomem banana e maçã, 120 consomem s ã o s u b c
o n j u n t o s d e $\square$ (n ú m e r o s i n t e i r o s) ,

laranja e maçã e 100 consomem laranja, banana e maçã. e $A \cap B = \{3, 8, 10\}$, então

O número de pessoas que consomem banana é igual ao

A)
n –
m
∈

número de pessoas que consomem maçã. O número

de pessoas que consomem maçã e não consomem B) $n + m \in B$

laranja é de C) $m - n \in A \cup B$

A) 95 D) $mn \in B$

B) 125 E) $\{m + n, mn\} \subset A$

C) 195 **02.** (UFLA-MG) Um mapa geográfico é colorido em quatro

D) 245 cores, sendo os países vizinhos de cores diferentes.

Considerar
os
conjuntos

04. $A = \{\text{países coloridos de azul}\}$ (UFC-2007) Dos 1 150 alunos de uma escola, 654 gostam

de Português, 564 gostam de Matemática e 176 não $B = \{\text{países vizinhos de países coloridos de azul}\}$

gostam de Português nem de Matemática. Sendo assim, $C = \{\text{países vizinhos de países coloridos de amarelo}\}$

a quantidade de alunos que gostam de Português e de

$M = \{\text{todos os países do mapa}\}$

Matemática é

Assinale a alternativa sempre **CoRRETA**.

A) 300

$$\begin{aligned} &A) \\ &A \\ &\cup \\ &B \\ &= \\ &M \end{aligned}$$

B) 250

$$\begin{aligned} &B) \\ &B \\ &\cap \\ &C \\ &= \\ &\emptyset \end{aligned}$$

C) 244

$$\begin{aligned} &C) \\ &A \\ &\cap \\ &B \\ &= \\ &\emptyset \end{aligned}$$

D) 201 D) $B \cup C = M$

E) 122 E) $M - A = B$

32 Coleção Estudo

Teoria dos conjuntos

03. (UFRGS) O conjunto **A** é um subconjunto de **B** e $A \neq B$, **07.** (UFU-MG) Num grupo de estudantes, 80% estudam

$A \cup (B - A)$ é inglês, 40% estudam francês e 10% não estudam

A) B nenhuma dessas línguas. Nesse grupo, a porcentagem

de alunos que estudam ambas as línguas é

B) A

C) A) 25%. Ø

D) A – B B) 50%.

E) $A \cap B$ C) 15%.

04. D) 33%. (Cesesp-PE) Numa universidade, são lidos apenas dois jornais **x** e **Y**. 80% de seus alunos leem o jornal **x** e 60%, E) 30%. o jornal **Y**. Sabendo-se que todo aluno é leitor de pelo

menos um dos dois jornais, assinale a alternativa que **08.** (UFMG) Os conjuntos **A**, **B** e $A \cup B$ têm, respectivamente, corresponde ao percentual de alunos que leem ambos.

10, 9 e 15 elementos. O número de elementos de $A \cap B$ é

A) 80%

A)
2

B) 14%

B)
3

C) 40%

C)
4

D) 60%

E) 48%

05. (UFMG) Em uma escola, 5 000 alunos inscreveram-se

MATEMÁTICA

para cursar as disciplinas **A** e **B**. Desses alunos, 2 825

09. (FGV-SP) Numa universidade com N alunos, 80 estudam

matrícularam-se na disciplina **A** e 1 027, na disciplina **B**.

Física, 90 Biologia, 55 Química, 32 Biologia e Física,

Por falta de condições acadêmicas, 1 324 alunos não

23 Química e Física, 16 Biologia e Química e 8 estudam

puderam matricular-se em nenhuma das disciplinas.

nas três faculdades. Sabendo-se que essa universidade

O número de alunos matriculados, simultaneamente, nas

duas disciplinas é somente mantém as três faculdades, quantos
alunos

estão matriculados na universidade?

A) 156

A) 304

B) 176

B) 162

C) 297

D) 1 027

E) 1 798 D) 154

E)
N.d.a.

06. (UFC) Sejam **m** e **N** conjuntos que possuem um único

elemento comum. Se o número de subconjuntos de

10. (UFRN) Se **A**, **B** e **C** são conjuntos tais que $C - (A \cup B) = \{6, 7\}$

m é igual ao dobro do número de subconjuntos de **N**,

e $C \cap (A \cup B) = \{4, 5\}$, então **C** é igual a

o número de elementos do conjunto $M \cup N$ é

A)
 $\{4,$
 $5\}$

A) o triplo do número de elementos de **m**.

B)
 $\{6,$
 $7\}$

B) o triplo do número de elementos de **N**.

C) o quádruplo do número de elementos de **m**. C) $\{4, 5, 6\}$

D) o dobro do número de elementos de **m**. D) $\{5, 6, 7\}$

E) o dobro do número de elementos de **N**. E) $\{4, 5, 6, 7\}$

Frente C Módulo 01

11. (FGV-SP) Em certo ano, ao analisar os dados dos **14.** (UFU-MG) Chamando de U o conjunto formado por todas

candidatos ao Concurso Vestibular para o Curso as pessoas que moram em Uberlândia, de A o subconjunto

de Graduação em Administração, nas modalidades de U formado pelas pessoas do sexo masculino e de B o

Administração de Empresas e Administração Pública, subconjunto de U formado pelas pessoas que nasceram

concluiu-se que em Uberlândia, então duas maneiras equivalentes de

i) 80% do número total de candidatos optaram pela representar o conjunto de pessoas do sexo feminino

modalidade Administração de Empresas. que moram em Uberlândia, mas que nasceram em outra

cidade
são

ii) 70% do número total de candidatos eram do sexo

observação: Para todo subconjunto C de U ,

masculino.

C_C
=
 $\{x$
 $\in$
 U :
 x
 $\notin$
 $C\}$.

iii) 50% do número de candidatos à modalidade c A) $A \cup B$ e $(A \cup B)^c$ Administração Pública eram do sexo masculino.

B)
A_c
U
B_c
e
(A
∩
B)_c

iv) 500 mulheres optaram pela modalidade Administração

Pública. C) $A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c$

O número de candidatos do sexo masculino à modalidade D) $A^c \cap B^c$ e $(A \cup B)^c$

Administração de Empresas foi

15. (UFOP-MG–2008) Se o conjunto **A** possui 67 elementos

A) 4 000

e o conjunto **B** possui 48 elementos, então o número de

B) 3 500 elementos do conjunto $A \cap B$ é, no **máximo**,

C) 3 000 A) 0 B) 115 C) 1 D) 48

D) 1 500 **16.** (UFMG) Em uma pesquisa de opinião, foram obtidos estes

E) 1 000 dados:

i) 40% dos entrevistados leem o jornal **A**.

12. (UFU-MG–2006) De uma escola de Uberlândia, partiu uma ii) 55% dos entrevistados leem o jornal **B**.

excursão para Caldas Novas com 40 alunos. Ao chegar em

iii) 35% dos entrevistados leem o jornal **C**.

Caldas Novas, 2 alunos adoeceram e não frequentaram as piscinas. Todos os demais alunos frequentaram as piscinas, iv) 12% dos entrevistados leem os jornais **A** e **B**.

sendo 20 pela manhã e à tarde, 12 somente pela manhã, v) 15% dos entrevistados leem os jornais **A** e **C**.

3 somente à noite e 8 pela manhã, à tarde e à noite.

vi) 19% dos entrevistados leem os jornais **B** e **C**.

Se ninguém frequentou as piscinas somente no período da tarde, quantos alunos frequentaram as piscinas à noite? vii) 7% dos entrevistados leem os três jornais.

A) 16 viii) 135 pessoas entrevistadas não leem nenhum dos

três
jornais

B) 12

Considerando-se esses dados, é **CoRRETo** afirmar que

C) 14

o número total de entrevistados foi

D) 18

A) 1 200 C) 1 250

13. B) 1 500 D) 1 350 (FGV-SP) Simplificando a expressão $(X \cap Y) \cup (X \cap Y)$,

teremos

17. (UFU-MG) O número de conjuntos distintos, os quais

A) universo.

contêm o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e estão

B) vazio. contidos no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,$

C) $X \cap Y$ $\{12, 13, 14, 15, 16\}$, é igual a

D) $X \cap Y$ A) 16 C) 64

E) $X \cap Y$ B) 32 D) 128

34 Coleção Estudo

Teoria dos conjuntos

18. (UEL-PR-2006) Um grupo de estudantes resolveu fazer

Instrução: Texto para a questão **02.**

uma pesquisa sobre as preferências dos alunos quanto ao Uma escola de Ensino Médio tem 250 alunos que estão

cardápio do restaurante universitário. 9 alunos optaram matriculados na 1ª, 2ª ou 3ª séries. 32% dos alunos são

somente por carne de frango, 3 somente por peixes, homens e 40% dos homens estão na 1ª série. 20% dos

7 por carne bovina e frango, 9 por peixe e carne bovina e alunos matriculados estão na 3ª série, sendo 10 alunos

homens. Dentre os alunos da 2ª série, o número de

4 pelos três tipos de carne. Considerando que 20 alunos

mulheres é igual ao número de homens. A tabela a seguir

manifestaram-se vegetarianos, 36 não optaram por carne pode ser preenchida com as informações dadas:

bovina e 42 não optaram por peixe, assinale a alternativa

que apresenta o número de alunos entrevistados. **1ª 2ª 3ª Total**

A) 38 D) 62 **mulher** $a + b + c$

B) 42 E) 78 **Homem** $d + e + f$

C) 58 **Total** $a + d + b + e + c + f$ 250

19. (ITA-SP) Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de **02.**
(Enem-1998) O valor de **a** é

um conjunto finito **x**. Sejam **A**, **B** e **C** conjuntos tais que

A) 10 B) 48 C) 92 D) 102 E) 120

$n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$

e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é
igual a **03.** (Enem-2002) Um estudo realizado com 100
indivíduos

que abastecem seu carro uma vez por semana em um

A) 11 D) 18

dos postos **x**, **Y** ou **Z** mostrou que

B) 14 E) 25 • 45 preferem **x** a **Y**, e **Y** a **Z**;

C) 15 • 25 preferem **Y** a **Z**, e **Z** a **x**;

• 30 preferem **Z** a **Y**, e **Y** a **x**. **MATEMÁTICA**

SEÇÃO ENEM Se um dos postos encerrar suas
atividades, e os

100 consumidores continuarem se orientando pelas
preferências descritas, é possível afirmar que a liderança

01. de preferência nunca pertencerá a (Enem–2004) Um fabricante de cosméticos decide

A) x . D) x ou Y .

produzir três diferentes catálogos de seus produtos,

B) Y . E) Y ou Z .

visando a públicos distintos. Como alguns produtos

estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam C) Z .

uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem

04. (Enem–2004) Antes de uma eleição para prefeito, certo

para diminuir os gastos com originais de impressão.

instituto realizou uma pesquisa em que foi consultado

Os catálogos C_1 , C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e um número significativo de eleitores, dos quais 36%

40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele responderam que iriam votar no candidato x ; 33%, no

verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 candidato Y e 31%, no candidato Z . A margem de erro

terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em estimada para cada um desses valores é de 3% para mais

comum, das quais 4 também estarão em C ou para menos. Os técnicos do instituto concluíram que, ¹. Efetuando

se confirmado o resultado da pesquisa,

os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que,

para a montagem dos três catálogos, necessitará de um A) apenas o candidato x poderia vencer e, nesse caso,

teria 39% do total de votos.

total de originais de impressão igual a

B) apenas os candidatos **x** e **Y** teriam chances de vencer.

A) 135

C) o candidato **Y** poderia vencer com uma diferença de

B) 126 até 5% sobre **x**.

D) o candidato **Z** poderia vencer com uma diferença de,

C) 118

no máximo, 1% sobre **x**.

D) 114

E) o candidato **Z** poderia vencer com uma diferença de

E) 110 até 5% sobre o candidato **Y**.

Editora Bernoulli **35**

Frente C Módulo 01

Instrução: Texto para as questões **05** e **06**.

GABARITO

A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome

Fixação

(MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional

sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31 922 01. A) 500

pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, B) 257 constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever

(74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os C) 84 moradores de rua que ingressaram no Ensino Superior, 0,7% D) 4%

se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos E) 19,6% quadros a seguir:

02.

A)

29

Por que vive na rua?

B)

5

Alcoolismo / drogas 36%

Desemprego C) 127 30%

Problemas familiares 30% 03. B

Perda de moradia 20%

Decepção amorosa 04. C 16%

05.

D

Escolaridade Propostos

Superior completo ou incompleto 1,4%

Médio completo ou incompleto 7,0%

Fundamental completo ou incompleto 01. A 58,7%

Nunca estudaram 15,1% 02. C

ISTOÉ, 07 maio 2008, p. 21 (Adaptação). 03. A

05. 04. C

(Enem–2008) As informações apresentadas no texto são suficientes para se concluir que 05. B

A) as pessoas que vivem na rua e sobrevivem de esmolas 06. E
são aquelas que nunca estudaram. 07. E

B) as pessoas que vivem na rua e cursaram o Ensino 08. C
Fundamental, completo ou incompleto, são aquelas

09.
B

que sabem ler e escrever.

C) existem pessoas que declararam mais de um motivo 10. E
para estarem vivendo na rua. 11. C

D) mais da metade das pessoas que vivem na rua e que 12. C
ingressaram no Ensino Superior se diplomou.

13.
C

E) as pessoas que declararam o desemprego como

14.
D

motivo para viver na rua também declararam a
decepção amorosa. 15. D

06. 16. B (Enem–2008) No universo pesquisado, considere que **P** seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos 17. C de alcoolismo / drogas e **Q** seja o conjunto daquelas 18. C cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. 19. D Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado

e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que

Seção Enem

essa pessoa faça parte do conjunto **P** ou do conjunto **Q**,

então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto 01. C 04. D

interseção de **P** e **Q** é igual a 02. C 05. C

A) 12%. C) 20%. E) 52%. 03. A 06. A

B) 16%. D) 36%.

36 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Conjuntos numéricos 02 C

CONJUNTO DOS NÚMEROS A soma, subtração ou multiplicação de números inteiros sempre resulta em um número inteiro. O conjunto dos

NATURAIS números inteiros ($\mathbb{Z}$) é, portanto, fechado em relação a

Chama-se conjunto dos números naturais – símbolo $\mathbb{N}$ –

ao conjunto formado pelos números 0, 1, 2, 3,

Divisibilidade

Assim: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Destacamos o conjunto $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Dizemos que o inteiro **a**, em que $a \neq 0$, é divisor do

(conjunto dos números naturais não nulos). inteiro **b**, ou que **a** divide **b**, se a divisão de **b** por **a** for

No conjunto dos números naturais, é sempre possível exata, ou seja, resto zero.

efetuarmos a soma ou a multiplicação de dois números

Exemplos

(essas operações estão definidas em $\mathbb{N}$). Dizemos que o conjunto dos números naturais é fechado em relação
1º) 2 é divisor de 6, pois $6 \div 2 = 3$.

à sua soma e à sua multiplicação. Porém, nem sempre
2º) 7 divide -21, pois $-21 \div 7 = -3$. sua subtração é possível. Por exemplo, $3 - 5 \notin \mathbb{N}$, daí a necessidade de um conjunto mais amplo.



Quando a é divisor de b , com $a \neq 0$, dizemos que



CONJUNTO DOS NÚMEROS “ b é divisível por a ” ou “ b é múltiplo de a ”.



INTEIROS Para um inteiro a qualquer, indicamos com $D(a)$ o conjunto de seus divisores e com $M(a)$ o conjunto de seus

múltiplos.

Chama-se conjunto dos números inteiros – símbolo $\mathbb{Z}$

–
ao conjunto formado por todos os números naturais e pelos **Exemplos** opostos.

$$1^{\circ}) D(2) = \{\pm 2, \pm 1\} \quad 4^{\circ}) M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

Assim: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$2^\circ) D(-3) = \{\pm 3, \pm 1\} \quad 5^\circ) M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$$

No conjunto $\mathbb{Z}$, distinguimos cinco subconjuntos notáveis:

$$3^\circ) D(0) = \mathbb{Z}^* \quad 6^\circ) M(0) = \{0\}$$

$$\text{i) } \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = (\text{conjunto dos inteiros não negativos})$$

Dizemos que um número inteiro p é primo se $p \notin \{-1, 0, 1\}$

$$\begin{aligned} e D(p) \\ &= \{-p, \\ &p, -1, \\ &1\}. \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \mathbb{Z}^- = \{0, -1, -2, -3, \dots\} (\text{conjunto dos inteiros não positivos}).$$

Exemplo

$$\text{iii) } \mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\} (\text{conjunto dos inteiros não nulos}).$$

Dado um número $q \notin \{-1, 1\}$, o inverso de q não existe

$$\text{iv) } \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^+ (\text{conjunto dos inteiros positivos}).$$

em $\mathbb{Z} : \notin \mathbb{Z}$. Por isso, não podemos definir em $\mathbb{Z}$ a

operação positivos). q

v) de divisão. Introduziremos, então, o conjunto dos números $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$ (conjunto dos inteiros -

negativos). racionais.

Editora Bernoulli 37

Frente C Módulo 02

CONJUNTO DOS NÚMEROS Podemos notar, também, que todo número na forma de decimal exata ou de dízima periódica pode ser convertido

RACIONAIS a à forma de fração e, portanto, representa um número b

racional.

Chama-se conjunto dos números racionais – símbolo $\mathbb{Q}$ –

ao conjunto das frações que podem ser reduzidas à forma $\frac{a}{b}$. Quando a decimal é exata, podemos transformá-la em uma fração cujo numerador é o numeral decimal sem a vírgula e em que $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros

No conjunto $\mathbb{Q}$, destacamos 5 subconjuntos: quantas forem as casas decimais do numeral dado.

i) $\mathbb{Q}^+ =$ conjunto dos racionais não negativos. + 3 4
236 1º) 0,3 = 3º) 4,236 = ii) $\mathbb{Q}^- =$ conjunto dos
racionais não positivos. - 10 1 000

iv) 2º) 17 634 598 0,17 = 4º) 63,4598 = iii) $\mathbb{Q}^* =$
= conjunto dos racionais não nulos.

* = conjunto dos números racionais positivos. + 100
10 000

o denominador. Se **a** e **b** são primos entre si, isto é, se
v) $\mathbb{Q}^* =$ conjunto dos racionais negativos. - Quando a
decimal é uma dízima periódica, devemos a Na fração
, em que $b \neq 0$, **a** é o numerador e **b**, procurar sua
geratriz. A seguir, são dados alguns exemplos b de
como obter a geratriz de uma dízima periódica.

MDC (a, b) = 1, então dizemos que a **Exemplo 1** é
uma fração irredutível. b Obter a fração geratriz de
0,444... . 2 3 7 6 Assim, as frações , e são irredutíveis,
mas não é. 3 7 15 10 $\} x = 0,444, \dots \mid 4 \ 10 \ x \ x \ x \} \Rightarrow$
 $- = \Rightarrow = 4$ O conjunto dos números inteiros está
contido no conjunto $10 \ x = 4,444, \dots 9 \} \mid$ números
racionais ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$), pois todo inteiro é uma fração 4
com denominador 1. Portanto, $0,444\dots = . \ 9 \ 2$ Assim,
 $2 \in \mathbb{Q}$, pois $2 = . \ 1$ **Regra Prática I**

Números decimais

pode ser representado por um número decimal. Passa-se Notemos que todo número racional a No numerador da fração, coloca-se aquilo que se repete , com $b \neq 0$, (período); no denominador, tantos novezes quantos forem os b algarismos que se repetem. No exemplo anterior, só um

um número racional a algarismo (o quatro) se repete; por isso, coloca-se um só 9 para a forma de número decimal no denominador da fração. b

dividindo o inteiro **a** pelo inteiro **b**. Na passagem de uma

**Exemplo
2**

notação para outra, podem ocorrer dois casos:

i) O número decimal tem uma quantidade finita de $0,2323232... =$

algarismos, diferentes de zero, isto é, uma decimal 99 exata. **Exemplo 3**

Exemplos Obter a fração geratriz de $2,4333... .$

1º) $2 \frac{1}{2} = 3^\circ) = 0,020$, $x = 2,4333... 150$

$$\begin{array}{l}
 2^{\circ}) 1 \ 100x = 243 \ 333 , \dots \mid 219 \ 73 \ 1 \ 037 \Rightarrow 100 \\
 x \ 10 \ x \ 219 \ x = 0 \ 25 , \ 4^{\circ}) = 0 \ 1037 , \ \mid - = \Rightarrow \\
 = = 10 \ x = 24 \ 333 , \dots \ 90 \ 30 \ 4 \ 10 \ 000 \ \mid
 \end{array}$$

ii) O número decimal tem uma quantidade infinita de **Regra Prática II**

algarismos que se repetem periodicamente, isto é,

uma dízima periódica. Para formar o numerador, junta-se a parte que não se

Exemplos repete com o período (243) e subtrai-se da parte que não

se repete (24). No denominador, coloca-se um 9 para cada

1º) $2 = 0,666\dots = 0,6$ (período 6) algarismo do período e um 0 para cada algarismo que não 3 se repete, após a vírgula.

2º) $2 = 0,285714285714\dots = 0,285714$ (período 285714) **Exemplo 4** $7 \ 417 \ 41 - 376$
 $94 \ 11 \ 0,41777\dots = = = 1,8333\dots = 1,8 \ 3$
(período 3) **3º)** $900 \ 900 \ 225 \ 6$

Conjuntos numéricos

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Números reais

Números irracionais Chama-se conjunto dos números reais – símbolo $\mathbb{R}$ –

àquele formado por todos os números com representação

decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (que são

Existem números cuja representação decimal com infinitas

números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas

casas decimais não é periódica. Por exemplo, o numeral (que são números irracionais).

decimal 0,1010010001... (em que o número de algarismos Dessa forma, o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é a união

0 intercalados entre os algarismos 1 vai crescendo) é do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) com o conjunto dos não periódico. Ele representa um número não racional números irracionais.

(irrational). No conjunto $\mathbb{R}$, destacamos cinco

subconjuntos:

Outros exemplos de números irracionais: i) $\mathbb{Q} =$ conjunto dos reais não negativos. +

ii) $\mathbb{Q} =$ conjunto dos reais não positivos. -

1º) 2 1,234567891011... 4º) iii) $\mathbb{Q}^* =$ conjunto dos reais não nulos.

2º) $_{3+} \mathbb{Q}$ iv) $^* =$ conjunto dos reais positivos.
6,02002000... 5º) 5

v) $\mathbb{Q}^* =$ conjunto dos reais negativos. -

3º) 34,56789101112... 6º) 1 + 3 Intervalos reais

OBSERVAÇÕES Dados dois números reais **a** e **b**, com $a < b$, definimos:

i) Dados **a** irracional e **r** racional não nulo, então: i) Intervalo aberto de extremos **a** e **b** é o conjunto:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$$

$\alpha + \mid r \mid a \mid b \mid \alpha \cdot r \mid \mid \alpha$ são todos números irracion são todos números irracionais. $\} \Rightarrow$ aais. ii) Intervalo fechado de extremos **a** e **b** é o conjunto: $r \mid [a, b] = \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leq x \leq b\} \mid r$

MATEMÁTICA $a \mid b \mid \alpha \mid$

iii) Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita)

Exemplos

de extremos **a** e **b** é o conjunto:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$1^\circ) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad 3^\circ) \frac{1}{2} a b$$

2º) 3 3 4º) iv) Intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda) 2 5 de extremos **a** e **b** é o conjunto: São números irracionais. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

a b

ii) A soma, subtração, multiplicação ou divisão de dois

irracionais pode resultar em um racional ou em um

Os números reais **a** e **b** são denominados, respectivamente,

irracional. extremo inferior e extremo superior do intervalo.

Exemplos Também são intervalos reais os “intervalos infinitos” assim

definidos:

$$1^\circ) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad 3^\circ) \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad \text{ii)}]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$2^\circ) \frac{1}{2} a$$

$$2.13 = 16 \text{ 4º) =}$$

$$3 \text{ 3 ii) }]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

São números irracionais

a

Exemplos

$$\text{iii) }]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$1^\circ) 12 + (1 - 12) = 1 \quad 3^\circ) 13 - 13 = 0 \quad a$$

$$2^\circ) 8 \quad \text{iv) } [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \quad 12 \cdot 18 = 4$$

$$4^\circ) = 2 \quad 2 \quad a \text{ São números racionais.}$$

Editora Bernoulli 39

Frente C Módulo 02

CONJUNTO DOS NÚMEROS 03. (UFJF-MG) Marque a alternativa **INCORRETA** a respeito dos números reais.

COMPLEXOS A) Se a representação decimal infinita de um número é periódica, então esse número é racional.

Vimos que $a \in \mathbb{R}$ qualquer que seja o real **a não negativo**. B) Se a representação decimal de um número é finita,

Assim, por exemplo, 15 e 37 são números reais. então

esse número é racional.

Se o índice da raiz for ímpar, os radicais da forma $\sqrt[n]{a}$ C)

Todo número irracional tem uma representação $- a$,

em que a decimal infinita. $\in \mathbb{Q}$, também representam números reais. É o caso, +

por exemplo, de D) Todo número racional tem uma representação decimal $5 - 3$.

finita.

Por outro lado, se o radicando é negativo, e o índice da

Por exemplo, $\sqrt[1]{-1}$ não é real, pois $\sqrt[1]{-1} = x \Rightarrow -1 = x^2$ de x por y, obtêm-se quociente z e resto 8. Sabe-se , o que x é impossível, pois se x raiz é par, o radical **04.** (UFMG) Considere x, y e z números naturais. Na divisão $n - a$ não representa elemento de $\mathbb{Q}$.

$\in \mathbb{Q}$, então $x_2 \geq 0$. que a representação decimal de é a dízima periódica y

Para resolver esse problema com $n a$, introduzimos o conjunto 7,363636... . Então, o valor de $x + y + z$ é

$\mathbb{Q}$ dos números complexos, do qual $\mathbb{Q}$ é um subconjunto. A) 190 B) 193 C) 191 D) 192

RESUMO 05. Assinale a afirmativa **VERDADEIRA**.

A) A soma de dois números irracionais positivos é um

Os conjuntos numéricos podem ser representados

número irracional.

esquemáticamente pela figura a seguir: B) O produto de dois números irracionais distintos é um

númer
irracio

C) O quadrado de um número irracional é um número

racion

D) A raiz quadrada de um número racional é um número

irracio

E) A diferença entre um número racional e um número

Observemos que $\square \subset$ irracional é um número irracional. $\square$
 $\subset \square \subset \square \subset$

$\square$.

Notemos também que: EXERCÍCIOS PROPOSTOS

i) $\square - \square =$ conjunto dos números inteiros negativos.

ii) $\square - \square =$ conjunto dos números racionais não inteiros. **01.** (UFOP-MG-2009) A respeito dos números $a = 0,499999\dots$

iii) e $b = 0,5$, é **CoRRETo** afirmar: $\square - \square =$ conjunto dos números reais irracionais.

A)
b
=
a
+

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

B) $a = b$ C) a é irracional e b é racional.

01. D) $a < b$ (PUC Rio) A soma $1,3333... + 0,16666...$ é igual a

A) 1 5 4 5 3 B) C) D) E) **02.** (UFJF-MG) Dados os intervalos $A = [-1, 3)$, $B = [1, 4]$, $C = [2, 3)$, $D = (1, 2]$ e $E = (0, 2]$, consideremos o **02.** (PUC-Campinas-SP) Considere os conjuntos: conjunto $P = [(A \cup B) - (C \cap D)] - E$. Marque a alternativa

☐ , dos números naturais, **INCORRETA.**

☐ , dos números racionais, A) $P \subset [-1, 4]$ C) $2 \in P$

☐ $_{+}$, dos números racionais não negativos, B) $(3, 4] \subset P$ D) $0 \in P$

☐ , dos números reais.

O número que expressa **03.** (UEL-PR) Observe os seguintes números.

I. 2,212121... IV. 3,1416

A) a quantidade de habitantes de uma cidade é um

elemento de ☐ , mas não de $\mathbb{Q}$ + ☐ II. 3,212223... V. π

B) a medida da altura de uma pessoa é um elemento de ☐ . π III. 5 C) a velocidade média de um veículo é um elemento de ☐ ,

mas não de ☐ . Assinale a alternativa que identifica os

números irracionais. +

D) o valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento A) I e II D) II e V

de $\square$. B) I e IV E) III e V

E) a medida do lado de um triângulo é um elemento de $\square$. C) II e III

40 Coleção Estudo

Conjuntos numéricos

04. (Unifor-CE) Qual, entre os números seguintes, é racional? **09.** (UFC) Sejam x e y números reais, tais que

A) π D) $^{-3}0,064 < < _4 1 1 2 3 x, < < y$ e $A = 3x - 2y$ 4 3 3 4

B) 30,1 E) $_4 0 016$, Então, é **CoRRETo** afirmar que

C) $_4 5 3 1$ A) $^30,27 < < A$ D) $- < < - A$ 3 2 4 3

05. 3 1 (UFG) Sejam os conjuntos: B) $< < A$ 1 E) $- < < A$ 0 4 3

Sobre esses conjuntos, pode-se afirmar: $A = \{2n: n \in \square\}$ e $B = \{2n - 1: n \in \square\}$ 4 3 C) $- < < - A$ 3 4

I. $A \cap B = \emptyset$. **10.** (PUC-SP) Um número racional qualquer

II. A é o conjunto dos números pares. A) tem sempre um número finito de ordens (casas)

III. $B \cup A = \square$. decimais.

Está **CoRReto** o que se afirma em B) tem sempre um número infinito de ordens (casas)

A) I e II, apenas. decimais. D) III, apenas.

C) não pode expressar-se na forma decimal exata.

B) II, apenas. E) I, II e III.

D) nunca se expressa na forma de uma decimal inexata.

C) II e III, apenas.

E)
N.d.a.

06. (Fatec-SP) Sejam a e b números irracionais.

11. (PUC-SP) Sabe-se que o produto de dois números

Das afirmações,

irracionais pode ser um número racional. Um exemplo é

I. ab é um número irracional.

$$A) {}^112.{}^13 = {}^136 \quad D) {}^12.2 = {}^18$$

II. $a + b$ é um número irracional.

$$B) {}^14.{}^19 = 6 \quad E) {}^12.{}^13 = {}^16$$

III. $a - b$ pode ser um número irracional.

$$C) \\ {}^13.1 \\ = \\ {}^13$$

pode-se concluir que

A) as três são falsas. **12.** (FGV-SP) Assinalando V ou F se as sentenças a seguir **MATEMÁTICA**

B) as três são verdadeiras. são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**,

C) somente I e III são verdadeiras. 1. $() \square \supset \square$ 3. $() \square \cup \square = \square$

D) somente I é verdadeira. 2. $() \square \cap \square = \square$ 4. $() \square \cap \square \supset \square$

E) somente I e II são falsas. obtemos

07. (CEFET-MG–2008) Sejam **p** e **q** inteiros positivos de B) V V V V
E) V V V F A) F V F V D) F V V V

p

forma que a fração irredutível seja igual à dízima C) F V V F

q

0,656565... . O valor de $y = \left(p - 1 \right)_2 \left[q - 18 \right]_3 \mid \mid_{11}$ **13.**
(UFJF-MG) Marque a alternativa **INCORRETA**.

$\left(q \mid \mid - \mid \mid \right)$ é A) Se **x** e **y** são números racionais, então $x + y$ é um $\frac{1}{3} (p - 1) \mid - \mid$ número racional.

A) 65 5 45 1 4 B) Se **x** e **y** são números irracionais, então $x + y$ é um B) C) D) E) 30 27 28 20 27 número irracional.

C) Se **x** e **y** são números racionais, então xy é um número

08. (UFMG–2006) Considere o conjunto de números racionais racional.

$M = \{ 5, 3, 5, 4 \}$ D) Se x é um número racional e y é um número irracional, $\{x, y\}$ é um conjunto irracional. Sejam x o menor elemento de m e y o maior elemento de n , então $x + y$ é um número irracional.

o maior elemento de m . Então, é **CoRRETo** afirmar que

5 4 14. (FUVEST-SP) Dados dois números reais a e b que

A) $x = 5$ e $y = 7$ satisfazem as desigualdades $1 < a < 2$ e $3 < b < 5$,

B) $x = 3$ pode-se afirmar que $5 < y = a + b < 9$ A) $a < b$ D) $a < b$
5 5 b 2

C) $x = 3$ e $y = 4$ satisfazem as desigualdades $5 < a < 7$ e $3 < b < 5$

D) $x = 5$ e $y = 1$ satisfazem as desigualdades $1 < a < 2$ e $3 < b < 5$

Editora Bernoulli **41**

Frente C Módulo 02

15. (PUC Minas) Sendo $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 3\}$ e **02.** (Enem-2009 / Anulada) No calendário utilizado

$B = \{x \text{ atualmente, os anos são numerados em uma escala } \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 3\}$, é **CoRRETo** afirmar: sem o zero, isto é, não existe o ano zero. A Era Cristã se A) $A \cup B = A$ D) $A \cap B \subset \mathbb{Z}$ inicia no ano 1 depois de Cristo (d.C.) e designa-se o ano $\cup B$ A) $B \subset \mathbb{Z}$ E) $A \cap B$

= B anterior a esse como ano 1 antes de Cristo (a.C.).
Por essa

C) $A \cap B = A$ razão, o primeiro século ou intervalo de 100 anos da era

cristã terminou no dia 31 de dezembro do ano 100 d.C.,

16. Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} : x = 6n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$ e quando haviam decorrido os primeiros 100 anos após o

$B = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$, então $A \cap B$ é igual a início da era. O século II começou no dia 1 de janeiro do

A) $\{x \text{ ano } 101 \text{ d.C., e assim sucessivamente. Como não existe } x : x \text{ é ímpar e múltiplo de } 3\}$.

B) $\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é par e múltiplo de } 3\}$. por exemplo, é de 100 anos. Outra forma de representar

C) $\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é múltiplo de } 3\}$. anos é utilizando-se números inteiros, como fazem os

D) $\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é múltiplo de } 9\}$. astrônomos. Para eles, o ano 1 a.C. corresponde ao ano

E) $\{x \text{ ano } 0, \text{ o ano } 2 \text{ a.C. ao ano } -1, \text{ e assim sucessivamente. } x : x \text{ é ímpar}\}$.

Os anos depois de Cristo são representados pelos números

17. (FUVEST-SP) Na figura, estão representados inteiros positivos, fazendo corresponder o número 1 ao

geometricamente os números reais 0, x , y e 1. ano 1 d.C. Considerando o intervalo de 3 a.C. a 2 d.C.,

Qual a posição do número xy ? o quadro que relaciona as duas contagens descritas

é:

0 x y 1

A) À esquerda de 0. D) Entre y e 1. **3 a.C. 2 a.C. 1 a.C. 1 d.C. 2 d.C. Calendário**

B) Entre 0 e x. E) À direita de 1. **Cômputo dos**

A) -1 0 1 2 3

C) Entre x e y. **astrônomos**

Cale

SEÇÃO ENEM **3 a.C. 2 a.C. 1 a.C. 1 d.C. 2 d.C.**

**Côm
dos**

B) -2 -1 0 1 2

01. astrônomos (Enem–2009) A Música e a Matemática se encontram na

representação dos tempos das notas musicais, conforme **Calendário**

3 a.C. 2 a.C. 1 a.C. 1 d.C. 2 d.C.

a figura seguinte: **atual**

**Côm
dos**

Semibreve 1 **astrônomos** 1 C) -2 -1 1 2 3 Semicolcheia

16 **Calendário**

3 a.C. 2 a.C. 1 a.C. 1 d.C. 2 d.C.

Mínima 1 D) Cômputo dos 2 1 -3 -2 -1 1 2 Fusa astrônomos
32

Semínima 1 3 a.C. 2 a.C. 1 a.C. 1 d.C. 2 d.C. Calendário

4 atual

1 Semifusa 1 Cômputo dos E) -3 -2
-1 0 1 64 astrônomos

Colcheia

8

Um compasso é uma unidade musical composta de

GABARITO

determinada quantidade de notas
musicais em que a Fixação soma das
durações coincide com a fração indicada como

fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de 01. E 02. D 03.
D 04. C 05. E

1 Propostos

compasso for , poderia ter um compasso ou com duas

semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo

musical de oito compassos, cuja fórmula é 3 02. C 08. C 14. C ,
poderia 03. C 09. D 15. D 4 possível a combinação de diferentes
figuras. Um trecho 01. B 07. D 13. B

ser preenchido com 04. D 10. E 16. A

A) 24 fusas. 05. E 11. A 17. B

06. E 12. A

B) 3 semínimas. Seção Enem C) 8
semínimas.

D) 24 colcheias e 12 semínimas. 01. D 02. B

E) 16 semínimas e 8 semicolcheias.

42 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Noções primitivas

de 01 D geometria plana

INTRODUÇÃO ÂNGULOS

Na geometria plana, ponto, reta e plano são
conceitos **Definição**

primitivos. Neste texto, vamos designar pontos por letras

maiúsculas (A, B, C, ...), retas por letras minúsculas. Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma

(r, s, t, ...) e planos por letras gregas (origem, não contidas numa mesma reta (não colineares). α , β , γ , ...).

Em nosso estudo, faremos uso de alguns postulados B (ou axiomas), que são verdades aceitas sem demonstração, e de teoremas (ou proposições), afirmações que podem ser demonstradas. O A

São exemplos de postulados:

Indica-se: $\angle AOB$, $\angle BOA$, AOB, BOA ou O.

P1) Numa reta, bem como num plano, há infinitos

Nomenclatura: vértice O e lados OA e OB.

pontos;

P2) Dois pontos distintos determinam uma única reta que **Ângulos consecutivos** os contém;

P3) Três pontos distintos não colineares determinam um plano. Dois ângulos são consecutivos se eles possuem um lado

único plano que os contém.

em
comum.

São exemplos de teoremas, que serão demonstrados posteriormente:

A P

T1) Em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos

é igual a 180° ;

B R

T2) Em qualquer quadrilátero, a soma dos ângulos internos é igual a 360° .

Segmento de reta

O O C Q

Nas figuras, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ (assim como os $\angle POQ$ e $\angle ROQ$)

Dados dois pontos distintos, **A** e **B**, na reta **r**, a reunião são consecutivos.

desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão

entre eles, em r , é o segmento de reta AB .

Ângulos adjacentes

$A B$

r Dois ângulos consecutivos, que não possuem ponto interior

Semirreta comum, são chamados de ângulos adjacentes.

B

Dados dois pontos distintos, A e B , na reta r , define-se

semirreta AB como a reunião dos pontos com origem em A

e sentido para B .

$A O A B$

r Na figura, AOC e COB são ângulos adjacentes.

Editora Bernoulli 43

Frente D Módulo 01

Ângulos complementares RETAS
PARALELAS CORTADAS

Dois ângulos são complementares se, e somente se, a soma **POR UMA TRANSVERSAL**

de suas medidas for 90° (π) radianos. Dizemos, nesse caso, $\parallel \parallel$ 2 Duas retas **r** e **s**, paralelas distintas, e uma transversal **t** ()

que um dos ângulos é o complemento do outro. determinam oito ângulos geométricos, conforme a figura.

Dois quaisquer desses ângulos ou são suplementares ou

são congruentes

Dois ângulos

$\Rightarrow$ complementares t

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

β da

r

Ângulos suplementares c b

r // s

Dois ângulos são suplementares se, e somente se, a soma h e

de suas medidas for 180° (p radianos). Dizemos, nesse caso, s

que um dos ângulos é o suplemento do outro. g f

Dois ângulos

$\Rightarrow$ suplementares

Exemplo $\alpha + \beta = 180^\circ$ | a e = β | b = f

Correspondentes $\angle d h = \angle$ | O suplemento do dobro de um ângulo excede em 30° o c $\angle = g$

triplo do complemento desse ângulo. Determinar o ângulo.

Ângulo: x | b h = internos | $\angle$ Complemento do ângulo:

$90^\circ - x$ c = e | $\angle$ Alternos $\angle$ Suplemento do dobro do

ângulo: $180^\circ - 2x$ | a g = $\angle$ externos $\angle$ | Equacionando,

teremos: d f = $\angle$ |

$$180^\circ - 2x = 30^\circ + 3(90^\circ - x) \Rightarrow x = 120^\circ$$

Classificação | b e + = 180° internos | $\angle$ c h + = 180°

| $\angle$ Colaterais $\angle$ i) Ângulo reto é todo ângulo cuja medida

é 90° . | a f + = 180° | externos $\angle$ ii) Ângulo agudo é um

ângulo menor que um ângulo reto. | d g 180° | $\angle$ + = $^\circ$

iii) Ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.

α α Se uma reta transversal t determina com duas retas coplanares, r e s , ângulos alternos congruentes, $\hat{\alpha}$ Ângulo reto $\hat{\alpha}$ Ângulo agudo $\hat{\alpha}$ Ângulo obtuso então $r \parallel s$.
 (90°) $(\alpha < 90^\circ)$ $(\alpha > 90^\circ)$

Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.) Exemplo

Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas.
 Determinar a .

Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um
 são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

30° r

α Ângulos opostos pelo $\beta \Rightarrow \alpha$ vértice $(\alpha = \beta)$

140°

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes
 (possuem a mesma medida). s

Noções primitivas de geometria plana

Resolução: 05. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, as retas r e s são

Sejam os pontos A , B e C e o ângulo α paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55° . β .

A medida, em graus, do ângulo 3 é

Os ângulos 140° e β são suplementares, ou seja, $\beta = 40^\circ$.

1 r

Trace a reta tracejada t paralela às retas r e s , passando

por B . Seja D um ponto da reta t . 3

2

A s

30° r

A) 50 D) 80

D α B B) 55 E) 100

t

C)
60

140°

$\beta = 40^\circ$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Os ângulos de medidas 30° e $\angle ABD$ são alternos internos,

ou seja, $\angle ABD = 30^\circ$. **01.** Um ângulo excede o seu complemento em 48° .

DETERMINE o suplemento desse ângulo.

Os ângulos de medidas 40° e $\angle CBD$ são alternos internos,

ou seja, $\angle CBD = 40^\circ$.

02. O complemento da terça parte de um ângulo

Assim: $a = \angle ABD + \angle CBD = 70^\circ$ excede o complemento desse ângulo em 30° .

DETERMINE o ângulo.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

MATEMÁTICA 03. O suplemento do triplo do complemento da metade de um

ângulo é igual ao triplo do complemento desse ângulo.

01. CALCULE: DETERMINE o ângulo.

A) O complemento de um ângulo mede 38° .

Qual é esse ângulo? **04. DETERMINE** dois ângulos complementares tais que o

2 1 dobro de um, aumentado da terça parte do outro, seja

B) do complemento de um ângulo mais do 3 5 igual a um ângulo reto.

suplemento do mesmo ângulo perfazem 70° .

Qual é esse ângulo? **05.** As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um

ângulo de 52° . Se um deles mede 40° , qual é a medida

02. A medida x de um ângulo tem 80° a mais que a medida do outro? de seu suplemento. **DETERmINE** x .

06. (UNAERP-SP) As retas r e s são interceptadas pela

03. (UFU-MG) Dois ângulos consecutivos são complementares. transversal t , conforme a figura. O valor de x para que

Então, o ângulo formado pelas bissetrizes desses r e s sejam paralelas é

ângulos é

t

A) 20°

B) 30°

$x + 20^\circ$ r

C) 35°

D) 40° $4x + 30^\circ$

E) 45° s

04. (VUNESP-SP) **CALCULE** em graus e minutos a medida do A) 20°
D) 30°

ângulo descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio, B) 26° E) 35°

durante o tempo de 135 segundos. C) 28°

Editora Bernoulli 45

Frente D Módulo 01

07. (PUC-SP) Um ângulo mede a metade de seu complemento. **12.**

(FUVEST-SP) As retas t e s são paralelas. A medida do

Então, esse ângulo mede ângulo x , em graus, é

A) 30° B) 60° C) 45° D) 90° E) 68°

08. x

(UNIRIO-RJ) As retas r e r são paralelas. O valor do 12

ângulo a , apresentado na figura a seguir, é

120°

α r_1

140°

130°

r_2 t s

A) 30° D) 60°

A) 40° B) 45° C) 50° D) 65° E) 130°

B) 40° E) 70°

09. C) 50 **CALCULE** os ângulos B e D , em que AB // DE e BC // DF.

A B 13. (Cesgranrio) Duas retas paralelas são cortadas por uma

3x transversal, de modo que a soma de dois dos ângulos

D E C agudos formados vale 72° . Então, qualquer dos ângulos

$2x + 5^\circ$ obtusos formados mede

A)
142°

F B) 144°

C)
148°

10. D) 150° (Cesgranrio) As retas r e s da figura são paralelas cortadas

pela transversal t. Se o ângulo E) 152° B é o triplo de A , então

B – A vale

t **14.** (UFG) Na figura a seguir, as retas r e s são paralelas.

A
medida
do
ângulo
b é

A

r

B

4x r

s 2x

A) 90° s D) 75° 120°

B) 85° E) 60°

C) 80° A) 100° D) 140°

B) 120° E) 130°

11. (UEL-PR) Na figura a seguir, as medidas x , y e z são C) 110°

diretamente proporcionais aos números 5, 20 e 25,

respectivamente. **15.** (UFES) O triplo do complemento de um ângulo é igual à

terça parte do suplemento desse ângulo. Esse ângulo mede

y A) 7π rad 8

O x 5π B) rad 16

z 7π C) rad 4

O suplemento do ângulo de medida x tem medida igual a 7π D) rad
A) 144° D) 82° 16

B) 128° E) 54° 5π E) rad C) 116° 8

46 Coleção Estudo

Noções primitivas de geometria plana

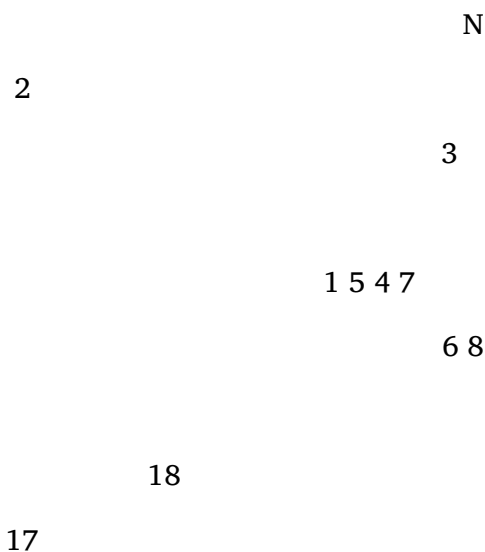
SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados

brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI

que partiu de Brasília-DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.

Mapa do Brasil e algumas capitais



1. Manaus 15 9 DF 10. Rio de Janeiro 14 2.
Boa Vista 11. São Paulo 13 3. Macapá 16
12. Curitiba

4. Belém 13. Belo Horizonte 11 10 5. São
Luís 14. Goiânia 12 6. Teresina 15. Cuiabá
7. Fortaleza 16. Campo Grande 8. Natal o
300 km 17. Porto Velho

9. Salvador 18. Rio Branco **MATEMÁTICA**

SIQUEIRA, S. *Brasil Regiões*. Disponível em:
< www.santiagosiqueira.pro.br > . Acesso em: 28 jul 2009
(Adaptação).

Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo

de 135 graus no sentido horário com a rota Brasília-Belém, e pousou em alguma das capitais brasileiras.

Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no

sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AII ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um

avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição

dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em

- A) Belo Horizonte, e, em seguida, embarcou para Curitiba.
- B) Belo Horizonte, e, em seguida, embarcou para Salvador.
- C) Boa Vista, e, em seguida, embarcou para Porto Velho.
- D) Goiânia, e, em seguida, embarcou para o Rio de Janeiro.
- E) Goiânia, e, em seguida, embarcou para Manaus.

02. (Enem–2009 / Anulada) Um decorador utilizou um único tipo de transformação geométrica para compor pares de cerâmicas

em uma parede. Uma das composições está representada pelas cerâmicas indicadas por I e II.

Utilizando a mesma transformação, qual é a figura que compõe par com a cerâmica indicada por III?

A) B) C) D) E)

Editora Bernoulli 47

Frente D Módulo 01

03. (Enem–2009 / Anulada) Uma das expressões artísticas

GABARITO mais famosas associada aos conceitos de simetria

e congruência é, talvez, a obra de Maurits Cornelis

Escher, artista holandês cujo trabalho é amplamente Fixação
difundido. A figura apresentada, de sua autoria, mostra

a pavimentação do plano com cavalos claros e cavalos

escuras, que são congruentes e se encaixam sem deixar 01. A) 52º

espaços vazios.



02.
130°

03.
E

04.
13°
30'

05.
E

Propos

Realizando procedimentos análogos aos feitos por Escher,
entre as figuras a seguir, aquela que poderia pavimentar 01. 111°
um plano, utilizando-se peças congruentes de tonalidades

claras e escuras é

A) B) C) D) E) 03. 80º

04. (Enem–2009) As figuras a seguir exibem um trecho de 05. 64º ou 144º

um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro 06. B da figura **A** e 8 peças no tabuleiro da figura **B**. As peças são retiradas do tabuleiro da figura **B** e colocadas no 07. A tabuleiro da figura **A** na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos. 08. A

Figura A Figura B 09. O ângulo B vale 105°, e o ângulo D vale 75°.

13.
B

14.
A

15.
D

Peça 1 Peça 2

Disponível em: . **Seção Enem**

Acesso em: 14 jul. 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela

01.
B

seta no tabuleiro da figura A colocando a peça

A) 1 após girá-la 90° no sentido horário. 02. B

B) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.

03.
B
e
D

C) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.

D) 2 após girá-la 180° no sentido horário. 04. C

E) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

MÓDULO FRENTE Triângulos e pontos notáveis 02 D

TRIÂNGULOS Quanto à medida dos seus lados, podemos classificar os triângulos em:

Considere três pontos não colineares **A**, **B** e **C**. A união dos

três segmentos de reta (**i**) Triângulo equilátero: Os três lados são congruentes AB , AC e BC)

com extremidades nos

três pontos é denominada triângulo ABC (indicação: entre si, e os três ângulos medem 60° . $\triangle ABC$).

Elementos

i) Vértices: São os pontos **A**, **B** e **C**. 60°

ii) Lados: São os segmentos BC , AC e AB , de medidas **a**, **b** e **c** indicadas na figura.

iii) Ângulos internos: BAC , ABC e ACB .

A

60° 60°

c

b

B

a **ii)** Triângulo isósceles: Possui pelo menos dois lados C

congruentes. O lado de medida diferente, caso exista,

O perímetro de um triângulo é a soma das medidas dos

lados. Representamos o perímetro por $2p$ e o semiperímetro é chamado base, e o ângulo oposto à base é chamado

por **p**. Assim, no triângulo ABC anterior, tem-se: ângulo do vértice. Os ângulos da base (opostos a

lados de medidas iguais) são congruentes. Observe



$2p = a + b + c$ e $p = \frac{a + b + c}{2}$ que todo triângulo equilátero é isósceles.



Classificação

Quanto à medida dos seus ângulos internos, podemos x x

classifi car os triângulos em:

$\alpha \alpha$

Triângulo isósceles

Triângulo obtusângulo Triângulo acutângulo

(um ângulo interno obtuso) (três ângulos internos agudos)

iii) Triângulo escaleno: Os três lados e os três ângulos são diferentes entre si.

Hipotenusa

Cateto (a)

(c)

Cateto (b)

Triângulo retângulo

(um ângulo interno reto)

Sabemos que, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$,

ou seja, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma

dos quadrados das medidas dos catetos. Triângulo escaleno

Frente D Módulo 02

PONTOS NOTÁVEIS Propriedades

Baricentro i) As três bissetrizes internas de um triângulo

interceptam-se num mesmo ponto, chamado incentro.

Mediana de um triângulo é um segmento de reta que une ii) O incentro é equidistante dos lados; portanto, é o

um vértice ao ponto médio do lado oposto. centro da circunferência inscrita no triângulo ABC.

Na figura, AM é mediana do triângulo ABC, relativa ao A

lado BC.

A Y Z

B C M

Circunc

Propriedades Mediatriz de um lado de um triângulo é a reta perpendicular

a esse
lado
pelo
seu
ponto
médio.

i) As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, chamado baricentro. Na figura, m é mediatriz do triângulo ABC, relativa ao a

lado BC.

ii) O baricentro divide cada uma das medianas na A proporção de 2 para 1 (do vértice ao ponto médio). m_a

A

$$M AG = 2.GM_1$$

$${}_3 M BG = 2.GM$$

$$G {}_2 B C$$

$${}_2 D$$

$$CG = 2.GM_3$$

B C M₁ Propriedades

i) As três mediatrizes dos lados de um triângulo

Incentro interceptam-se num mesmo ponto, chamado circuncentro.

Bissetriz interna de um triângulo é um segmento de reta ii) O circuncentro é equidistante dos vértices;

que une um vértice ao lado oposto e divide o ângulo do portanto, é o centro da circunferência circunscrita vértice ao meio. ao triângulo ABC.

ao vértice A, e B Na figura, AD é a bissetriz interna do triângulo ABC relativa A m A D = D A_b C.

A

α α O

B C m D_a

50 Coleção Estudo

Triângulos e pontos notáveis

Posição do circuncentro em Propriedade

relação a um triângulo As três retas
suportes das alturas de um triângulo

interceptam-se num mesmo ponto, denominado
ortocentro.

A) É interno, se o triângulo é acutângulo.

A

A E

F

H

O

B C

D

B C Posição do ortocentro em relação

a um triângulo

B) É o ponto médio da hipotenusa, se o triângulo é retângulo. A) É interno, se o triângulo é acutângulo.

A A

H

B C

O

B C

B) É o vértice do ângulo reto, se o triângulo é retângulo.

A MATEMÁTICA

C) É externo, se o triângulo é obtusângulo.

A

H = B C

B C

C) É externo, se o triângulo é obtusângulo.

O

A

C

B

Ortocentro _H

Altura de um triângulo é o segmento de reta traçado de um VÉRTICE à reta suporte do lado oposto, perpendicularmente

Observações

i) Em um triângulo isósceles, o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro são colineares.

Nesta figura, AD é a altura do triângulo ABC, relativa ao A

lado BC.

A

O

G

B B C D C

Editora Bernoulli 51

Frente D Módulo 02

ii) Em um triângulo equilátero, os quatro pontos notáveis Sendo α e β as medidas dos ângulos internos

C e B,

são coincidentes. respectivamente, e indicando por α a medida do ângulo

A externo relativo ao vértice A,

$$30^\circ \quad 30^\circ \quad B$$

$$H = O$$

$$G = I_{ae}$$

$$B \quad 30^\circ \quad \alpha \quad 180^\circ - \alpha \quad 30^\circ \quad C \quad D \quad A \quad D$$

TEOREMAS temos $a + \beta + 180^\circ - a = 180^\circ$,
isto é: $\Rightarrow a = a + \beta$

Soma dos ângulos internos de um Δ
medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das
medidas dos ângulos internos não

triângulo adjacentes a ele.

Considere um triângulo qualquer ABC cujos ângulos
A, B

e C têm medidas α , β e γ , respectivamente.

Desigualdades nos triângulos

A

α

A) Dados dois lados de um triângulo, de medidas
diferentes, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

β e C

B C

Traçando por A a reta DE paralela a BC,
determinamos a C b

ângulos alternos internos congruentes.

$$D \ B \ A \ A \ E \ B \ A \ c \ \theta \ \beta \ \alpha$$

$$b < a < c \Leftrightarrow B < A < C$$

$$\beta \ \theta$$

$$B \ C$$

B) Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma

Como o ângulo D AE mede 180° , concluímos que: dos outros dois.



$$a + \beta + q = 180^\circ \ C$$



Ângulo externo de um triângulo $a \ b$



B



B A c



Ângulo externo

relativo ao vértice A

$$a < b + c \quad b < a + c \quad c < a + b$$

C As três desigualdades citadas são equivalentes a: A D



O ângulo $\widehat{BAD}$ é adjacente e suplementar de um ângulo $|b - c| < a < b + c$

interno do triângulo ABC; por isso, $\widehat{BAD}$ é chamado de ângulo externo desse triângulo.

Área de um triângulo 02. (UFMG) Observe a figura.

Para calcularmos a área de um triângulo fazemos metade

b

do produto de um dos lados (base) pela altura relativa a ele.

2b

No triângulo ABC a seguir, temos:

C x a 2a

Nela, a, 2a, b, 2b e x representam as medidas, em graus, altura

dos ângulos assinalados. O valor de x, em graus, é

A A) 100 B

base B) 110

C)
115



Área base altura . D) $120 = \Delta ABC$ 2

03. (UFES) Um dos ângulos internos de um triângulo isósceles

Se o triângulo for retângulo e considerarmos como base mede 100° . Qual é a medida do ângulo agudo formado um dos catetos, o outro cateto será a altura, e a área será pelas bissetrizes dos outros ângulos internos? igual ao semiproducto dos catetos: A) 20°

B)
 40°

B C) 60°

D)
 80°

cateto E) 140° c

A 04. MATEMÁTICA
(PUC Minas) Na figura, o triângulo ABC é equilátero e está circunscrito ao círculo de centro O e raio 2 cm. AD é altura do triângulo. Sendo E ponto de tangência, a medida de

AE, em centímetros, é



$A A_{\Delta ABC} = 2 b c .$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO E O

01. B C (UFU-MG) Na fi gura a seguir, o ângulo x , em graus, D

pertence ao intervalo A) 2^{13} D) 5

B) 2^{15} E) 126

$4x$

C)
3

$3x$ $6x$ **05.** (UFPE) Na fi gura a seguir,
DETERmINE o ângulo que é $2x$

oposto ao lado de menor comprimento.

$5x$ 61° 96° 61°

A) 42° 45° 58° $(0^{\circ}, 15^{\circ})$ 42°

B) $(15^{\circ}, 20^{\circ})$

D) $(25^\circ, 30^\circ)$ 250 350Editora Bernoulli **53**

Frente D Módulo 02

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 05. (Unimontes-MG-2009) Na figura a seguir, MNPQ é um quadrado, e NPR é um triângulo equilátero. O ângulo α

01. mede (UNITAU-SP) O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é α Q M denominado R

A) mediana.

B) mediatriz.

C) bissetriz.

P N

D) altura.

E) base. A) 30° C) 75° B) 15° D) 25°

02. (UFU-MG) Considere o triângulo ABC, a seguir, e **D** $\hat{=}$ **06.** (UFF-RJ) O triângulo MNP é tal que o ângulo $M = 80^\circ$ um ponto no lado AC, tal que $AD = BD = BC = 1$ cm. $\hat{=}$ e o ângulo $P = 60^\circ$. A medida do ângulo formado pela Nesse caso, a relação existente entre os ângulos indicados

a e bissetriz do ângulo interno N com a bissetriz do ângulo β é

C externo P é

A)
20°

B)
30°

C)
40°

D)
50°

β E) 60°

α

A B **07.** (UFMG) Observe a figura:

A) $\beta + 2a = p$ C) $\beta = 3a$ π A

B) $\beta = 2a$ D) $a - \beta =$

4 D

E

03. (UFMG) Observe a figura: 140°

E B C F

C Nessa figura, $AB \equiv AC$, BD é bissetriz de $\widehat{ABC}$, CE é

bissetriz de $\widehat{BCD}$ e a medida do ângulo ACF é 140°.

D A medida do ângulo DEC, em graus, é

A)
20

A B B) 30

BD é bissetriz de $\hat{A} \hat{C}$) 40 BC, $EB = 2 \cdot (EA)$ e a medida do

ângulo $\hat{E} \hat{D}$) 50 BC é 80° . A medida do ângulo CDB é

A) 40° E) 60

B) 50° **08.** (FUVEST-SP) Na figura a seguir, $AB = AC$, D é o ponto

C) 55°

de encontro das bissetrizes do triângulo ABC, e o ângulo

D) 60° D é o triplo do ângulo A. Então, a medida de A é

E) 65°

B

04. (UNIFESP-SP-2008) Tem-se um triângulo equilátero em

que cada lado mede 6 cm. O raio do círculo circunscrito A D

a esse triângulo, em centímetros, mede

A) $\frac{1}{3}$

B) $2\sqrt{\frac{1}{3}}$

C) 4 A) 18° D) 36°

D) $3\sqrt{2}$ B) 12° E) 15°

E) $3\sqrt{3}$ C) 24°

54 Coleção Estudo

Triângulos e pontos notáveis

09. (FUVEST-SP) Na figura, $AB = BD = CD$. Então, **15.** (VUNESP-SP) Considere o triângulo ABC da figura adiante.

Se a bissetriz interna do ângulo B forma com a bissetriz

D

y externa do ângulo C um ângulo de 50° , **DETERMINE** a

medida do ângulo interno A.

A B x

C A 50°

A) $y = 3x$

B) $y = 2x$

C) $x + y = 180^\circ$

D) $x = y$

E) $3x = 2y$ **16.** (ITA-SP) Seja ABC um triângulo isósceles de base BC.

10. (PUC-SP) Na figura, $BC = CA = AD = DE$. O ângulo CAD Sobre o lado AC desse triângulo, considere um ponto D

mede tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes

A ^ entre si. A medida do ângulo B AC é igual a

A) 23° D) 40° B) 32° E) 45°

B E C) 36° 40° 40°

C D

A) 10° D) 40° **17.** (Unificado-RJ) Na figura a seguir, os pontos **A**, **B** e **C**

B) 20° E) 60° representam as posições de três casas construídas numa

C) 30° área plana de um condomínio. Um posto policial estará
11. localizado num ponto **P** situado à mesma distância das
(UFMT–2006) Deseja-se instalar uma fábrica num lugar
que seja equidistante dos municípios **A**, **B** e **C**. Admita três casas.

Em Geometria, o ponto **P** é conhecido pelo o

MATEMÁTICA

que **A**, **B** e **C** são pontos não colineares de uma região nome de
plana e que o triângulo **ABC** é escaleno. Nessas condições, **A** **B**
o ponto onde a fábrica deverá ser instalada é o

A) centro da circunferência que passa por **A**, **B** e **C**.

B) baricentro do triângulo **ABC**.

C) ponto médio do segmento **BC**.

D) ponto médio do segmento **AB**. **C**

E) ponto médio do segmento **AC**. A) baricentro. D) incentro.

12. B) ortocentro. E) ex-incentro. Se **P** é o incentro de um triângulo **ABC** e $\angle BPC = 125^\circ$,

DETERMINE A C) circuncentro. .

13. 18. (UFPE–2009) Na ilustração a seguir, **AD** e **BD** estão nas O

circuncentro de um triângulo isósceles é interno ao

triângulo e duas mediatrizes formam um ângulo de 50° . bissetrizes respectivas dos ângulos CAB e CBA do triângulo

DETERMINE os ângulos desse triângulo. ABC, e EF, que contém D, é paralela a AB. Se $AC = 12$

e $BC = 8$, qual o perímetro do triângulo CEF?

14. Na figura, ABCD é retângulo, m é o ponto médio de CD e o C triângulo ABM é equilátero. Sendo $AB = 15$, **CALCULE** AP.

D M C

E D F

P

A B

A) 16 D) 22

B) 18 E) 24

A B C) 20

Editora Bernoulli **55**

Frente D Módulo 02

19. Se H é o ortocentro de um triângulo isósceles ABC de base **02.** (Enem-2010) Em canteiros de obras de construção civil

BC é comum perceber trabalhadores realizando medidas de e $BH \perp AC = 50^\circ$, **DETERMINE** os ângulos do triângulo.

comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por

20. onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses (FUVEST-SP-2009) Na figura, **B**, **C** e **D** são pontos

distintos da circunferência de centro **O**, e o ponto **A** é canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano.

exterior a ela. Além disso, Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas,

três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras

I. **A**, **B**, **C** e **A**, **O**, **D** são colineares;

três eram os pontos médios dos lados desse triângulo,

II. $AB = OB$; conforme pode ser visto na figura, em que as estacas

III. **C D** mede a **O** foram indicadas por letras. radianos.

B

C

B M P

A O D

A C

N

A região demarcada pelas estacas **A**, **B**, **m** e **N** deveria

Nessas condições, a medida de $\angle ABO$, em radianos, ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser

é igual a calçada corresponde

α A) à mesma área do triângulo $\triangle AMC$.

A) p –

4 B) à mesma área do triângulo $\triangle BNC$.

α C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.

B) $p - D$) ao dobro da área do triângulo MNC. 2

C) $2\alpha p$ E) ao triplo da área do triângulo MNC. –

3

D) $3\alpha p -$ **GABARITO** 4

E) $3\alpha p -$ **Fixação** 2

01. B 04. A

02. D 05. 58°

SEÇÃO ENEM 03. B

01. Propostos (Enem–2005) Quatro estações distribuidoras de energia

A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado 01. D 11. A

de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central 02. C 12. 70°

que seja ao mesmo tempo equidistante das estações 03. D 13. 50°, 50° e 80° ou 50°, 65° e 65°

A e B e da estrada (reta) que liga as estações **C e D**. 04. B 14. 10

A nova estação deve ser localizada 05. B 15. 100°

A) no centro do quadrado. 06. C 16. C

07. C 17. C

B) na perpendicular à estrada que liga **C** e **D** passando

por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada. 08. D 18. C

09. A 19. 25° , 25° e 130°

C) na perpendicular à estrada que liga **C** e **D** passando

10. B 20. C

por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

D) no vértice de um triângulo equilátero de base AB, **Seção**

Enem

oposto a essa base.

01. C 02. E

E) no ponto médio da estrada que liga as estações **A** e **B**.

56 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Trigonometria no triângulo 01 E retângulo

TRIÂNGULO RETÂNGULO A

demonstração formal do Teorema de Pitágoras pode ser feita a partir das relações métricas no triângulo retângulo.

Oferecemos, aqui, apenas uma ideia de como se obter

Triângulo retângulo é todo triângulo que tem um tal resultado, utilizando um quadrado (de lado $b + c$),

ângulo reto. subdividido em quatro triângulos retângulos (de lados

Na figura, BAC , a , b e c), e um quadrado menor (de lado a). C é reto. Costumamos dizer que o triângulo

ABC é retângulo em A . ca

BAC

b

a

a

ca

AC

Somando as áreas dos quatro triângulos retângulos e do

Em todo triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo quadrado menor, obtemos a área do quadrado maior. Logo:

reto são denominados **catetos**, o lado oposto ao

ângulo bc 4. $+ a_2 = (b + c)_2 \Rightarrow 2bc + a_2 = b_2 + 2bc + c_2 \Rightarrow$ reto é chamado de **hipotenusa**, e os ângulos agudos são 2 denominados **complementares**.

$$a_2 = b_2 + c_2$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

Aplicações

Vamos deduzir, num quadrado, a relação entre as medidas **d** de uma diagonal e $\square$ de um lado e, num triângulo



Em todo triângulo retângulo, a soma dos **equilátero**, a relação entre as medidas **h** de uma altura e $\square$



de um lado.



quadrados das medidas dos catetos é igual ao

quadrado da medida da hipotenusa. **Diagonal do quadrado**

D C

Na figura, **b** e **c** são as medidas dos catetos; e **a**, a medida

da hipotenusa. Daí, temos:

B d

a

C A B

No triângulo BCD, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$$



$$c_2 + b_2 = a_2 \quad d = \square^{12}$$

Editora Bernoulli 57

Frente E Módulo 01

Altura do triângulo equilátero _{B C}

C seno (sen) a b c a

c b

coseno
(cos)

a a

b c tangente (tg) c b h

Utilizando o quadrado e o triângulo equilátero, é possível

construir uma tabela com os valores do seno, do coseno e

A H B da tangente dos ângulos 30° , 45° e 60° .

$$2 \quad 2$$

No triângulo HBC, pelo Teorema de Pitágoras, temos: a 30° 45° 60°

$$\square_2 1$$

$$h + \left(= \square \Rightarrow \text{sen } 22 \right) 2 \quad 3$$

$$\left(\mid 2 \text{ a } 2 \quad 2 \quad 2 \right) \mid$$

$$h_2 = 2 \Rightarrow \square_2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad \square - \cos a \quad 2$$

$$4 \quad 2 \quad 2$$

$$h_2 \quad 3_2 \quad \square \quad 3 \Rightarrow = \text{tg } a \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 3$$



$$h = 3$$

2 **RELAÇÕES ENTRE
SENO,**

COSSENO E TANGENTE

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS c

NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

i) Seno: Em todo triângulo retângulo, o seno de um C

ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto

oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.
a b

ii) Cosseno: Em todo triângulo retângulo, o cosseno de

um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto

adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

iii) Tangente: Em todo triângulo retângulo, a tangente B

de um ângulo agudo é a razão entre a medida do B A c cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto

Na fi
gura:

adjacente a esse ângulo.

$$\frac{\text{sen } C}{c} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } A}{a}$$

$$\frac{\cos C}{c} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos A}{a}$$

$$\frac{\text{tg } C}{c} = \frac{\text{tg } B}{b} = \frac{\text{tg } A}{a}$$

Num triângulo ABC, retângulo em **A**, vamos indicar por a, b, c as medidas dos lados opostos aos ângulos

B e **C** as medidas dos ângulos internos, respectivamente, Dividindo $\text{sen } B$ por $\cos B$, obtemos: de vértices **B** e **C**.

b

$$\frac{\text{sen } B}{\cos B} = \frac{b}{c} = \text{tg } B$$

a

a



$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

$\cos \alpha$

Portanto, a tangente de um ângulo é o quociente entre o seno e o cosseno desse ângulo.

Trigonometria no triângulo retângulo

Dividindo os membros de $b^2 + c^2 = a^2$ por a^2 , temos:

02. (UFMG) Nesta figura, E é o ponto médio do lado BC do

$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}$
 quadrado ABCD. A tangente do ângulo α é $\frac{b}{c}$

$$\frac{b}{c} = \tan \alpha$$

Substituindo $\frac{b}{c} = \tan B$, $\frac{c}{a} = \cos B$, obtemos: $\frac{a^2 \tan^2 B}{a^2 \cos^2 B} = 1$



$$\tan^2 B + \cos^2 B = 1$$

Portanto, a soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo é igual a 1.

de um ângulo é igual a 1. B) 1

Observamos ainda que $\sin B = \cos C$ e $\sin C = \cos B$. C) 2

3

Portanto, o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno D)

2

do complemento desse ângulo, e vice-versa.

03. (UFV-MG–2006) Um passageiro em um avião avista duas cidades **A** e **B** sob ângulos de 15° e 30° , respectivamente, conforme a figura a seguir.

$$\cos a = \sin (90^\circ - a)$$

$$\sin a = \cos (90^\circ - a)$$

3 km

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

B

Cidade A Cidade B

Se o avião está a uma altitude de 3 km, a distância entre

MATEMÁTICA

01. as cidades **A** e **B** é (UFJF-MG) Um topógrafo foi chamado para obter a altura

de um edifício. Para fazer isso, ele colocou um teodolito A) 7 km.

(instrumento ótico para medir ângulos) a 200 metros do

B)
5,5
km.

edifício e mediu um ângulo de 30° , como indicado na

figura a seguir. Sabendo que a luneta do teodolito está a C) 6 km.

1,5 metro do solo, pode-se concluir que, entre os valores D) 6,5 km.

a seguir, o que **MELHOR** aproxima a altura do edifício,

E)
5
km.

em metros, é

04. (UFMG) Observe a figura.

D C

30°

60°

A B

Na figura anterior, o trapézio ABCD tem altura $2\sqrt{3}$ e bases

A) $11\sqrt{2}$ D) $20\sqrt{3}$ AB = 4 e DC = 1. A medida do lado BC é

B) $11\sqrt{5}$ E) $12\sqrt{4}$ A) $\sqrt{14}$

C) $11\sqrt{7}$ B) $\sqrt{13}$

Use os valores: C) 4

$\sin 30^\circ = 0,5$ $\cos 30^\circ = 0,866$ $\operatorname{tg} 30^\circ = 0,577$ D) $\sqrt{15}$

Frente E Módulo 01

05. (UFOP-MG) Um observador vê um prédio segundo um **02.**
(UFMG) Observe a figura.

ângulo α . Após caminhar uma distância d em direção ao A
prédio, ele passa a vê-lo segundo um ângulo β . Podemos
afirmar que a altura h do prédio é

C E D 30°

Se a medida de EC é 80, o comprimento de BC é

h

A) 20 C) 8

B) 10 D) 5

$\alpha \beta$

03. (PUC Minas) A diagonal de um retângulo
mede 10 cm,

e os lados formam uma proporção com os números 3 e 4.

$d \operatorname{tg} \beta$. α O perímetro do retângulo, em cm, é de β

A)

$\operatorname{tg} \beta - \alpha$ A) 14

B)

16

B) $d \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta$

tg tg C) $28 \alpha - \beta$

D)

34

C) $d \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta$

tg tg E) $40 \beta + \alpha$

D) **d 04.** (CEFET-MG–2009) O projeto de um avião de brinquedo,

representado na figura a seguir, necessita de alguns

EXERCÍCIOS PROPOSTOS ajustes em relação à proporção entre os eixos AB e CD.

Para isso, deve-se calcular o ângulo BAC do triângulo **A, B e C.**

01. 34,6 cm (UFJF-MG) Ao aproximar-se de uma ilha, o capitão de um

D

navio avistou uma montanha e decidiu medir a sua altura.

Ele mediu um ângulo de 30° na direção do seu cume,

A B

como indicado na figura. Depois de navegar mais 2 km

em direção à montanha, repetiu o procedimento, medindo

um novo ângulo de 45° . Então, usando $\sqrt{3} = 1,73$, C

o valor que mais se aproxima da altura dessa montanha,

Considerando que o avião é simétrico em relação ao eixo CD e que $\sqrt{3} = 1,73$, o valor de $\widehat{BAC}$ é

A) 30° D) 75°

B) 45° E) 90°

C) 60°

05. (UNESP-SP-2008) Dado o triângulo retângulo ABC, cujos

30° e 45°

catetos são: $AB = \text{sen } x$ e $BC = \cos x$, os ângulos em

2 km A e C são

A) $A = x$ e $C = \pi$

A) 2,1 2

B) 2,2 B) $A = \pi$ e $C = x^2$

C) 2,5 C) $A = x$ e $C = \pi - x^2$

D) 2,7 $-x$ e $C = x$ D) $A = \pi^2$

E) 3,0 π E) $A = x$ e $C = 4$

Trigonometria no triângulo retângulo

06. (UNESP-SP-2008) Dois edifícios, x e Y , estão um em frente ao outro, num terreno plano. Um observador, no pontos estratégicos de um acampamento em construção,

pé do edifício x (ponto P), mede um ângulo α em relação ao ponto Q no edifício Y . (metros) y

um sistema de eixos cartesianos ortogonais,

ao topo do edifício Y (ponto Q). Depois disso, no topo do conforme mostra a figura a seguir, em que os pontos F e m

edifício x , num ponto R , de forma que $RPTS$ formem um representam os locais onde serão construídos os respectivos

retângulo e QT seja perpendicular a PT , esse observador dormitórios feminino e masculino e R , o refeitório.

mede um ângulo β em relação ao ponto Q no edifício Y . (metros) y

$Q F$

$30^\circ M(30, 0)$

$R x$ (metros)

$R \beta Y S h$

Se o escritório da coordenação do acampamento deverá

10 m ser equidistante dos dormitórios feminino e masculino e, X

α no sistema, sua representação é um ponto pertencente

$P T$ ao eixo das abscissas, quantos metros ele distará do

(figura fora de escala) refeitório?

Sabendo que a altura do edifício x é 10 m e que A) $10\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{3}$ E) $8\sqrt{3}$

$3 \operatorname{tg} \alpha = 4 \operatorname{tg} \beta$, a altura h do edifício Y , em metros, é B) 10 D) 9

A) **09.** (UFJF-MG) O valor de $y = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + 3 \cdot 40$

B) $50 + \sin^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 70^\circ +$

$80^\circ + \sin^2 90^\circ$ é **MATEMÁTICA**

4

A) -1 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

C) 30

D) **40 10.** (VUNESP-SP) A partir de um ponto, observa-se o topo de

um prédio sob um ângulo de 30° . Caminhando 23 m em

E) 50

direção ao prédio, atingimos outro ponto de onde se vê o

07. topo do prédio segundo um ângulo de 60° . Desprezando

(PUC RS) De um ponto A , no solo, visam-se a base B e

a altura do observador, a altura do prédio em metros é

o topo C de um bastão colocado verticalmente no alto de

A) entre 10 e 12. D) entre 18 e 19.

uma colina, sob ângulos de 30° e 45° , respectivamente.

Se o bastão mede 4 m de comprimento, a altura da colina, B) entre 12 e 15. E) maior que 19.

em metros, é igual a C) entre 15 e 18.

C

11. (UFOP-MG-2009) Uma ponte elevadiça está construída sobre

um rio cujo leito tem largura igual a 80 m, conforme ilustra

B a figura. A largura $\square$ do vão entre as rampas dessa ponte,

quando o ângulo de elevação das rampas é de 30° , é

A

40 m 40 m

A) $13 \cdot 30^\circ \cdot 30^\circ$

B) 2

80 m

C) 2^{13}

D) $2^{(13 + 1)}$ A) $50 - 13$ C) $4(10 - 20^{13})$

E) $2^{(13 + 3)}$ B) $4(20 - 10^{13})$ D) $20(4 - 13)$

Editora Bernoulli **61**

Frente E Módulo 01

12. (PUC-SP) Um dos ângulos de um triângulo retângulo é α . **02.** (Enem-2010) Um balão atmosférico, lançado em

Se $\tan \alpha = 2,4$, os lados desse triângulo são proporcionais a Bauru (343 quilômetros a noroeste de São Paulo), na

A) 30, 40, 50 noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em

B) 80, 150, 170 Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte

C) 120, 350, 370

do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil,

D) 50, 120, 130 França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do

E) 61, 60, 11 comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

13. Disponível em: <http://www.correiodobrasil.com.br>. (FUVEST-SP-2008) Para se calcular a altura de uma torre,

Acesso em: 02 maio 2010.

utilizou-se o seguinte procedimento ilustrado na figura:

um aparelho (de altura desprezível) foi colocado no solo, Balão

a uma certa distância da torre, e emitiu um raio em

direção ao ponto mais alto da torre. O ângulo determinado

$$\alpha$$

entre o raio e o solo foi de $\alpha = \theta$ radianos. A seguir,

$$\theta$$

o aparelho foi deslocado 4 metros em direção à torre e o 60° $30'$

ângulo então obtido foi de 1,8 Km A 3,7 Km B θ radianos, com $\tan \theta$

$$= 3^{13}.$$

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão.

Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60° ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou α β sob um ângulo de 30° . Qual a altura aproximada em que

se encontra o balão?

É **CoRReto** afirmar que a altura da torre, em metros, é

A) 1,8 km C) 3,1 km E) 5,5 km

A) 4^{13} C) 6^{13} E) 8^{13} B) 1,9 km D) 3,7 km

B) 5^{13} D) 7^{13}

SEÇÃO ENEM GABARITO

01. Fixação (Enem–2006)

01. C 04. B

30 cm

02. A 05. A

03.
C

Corrimão Propostos

90 cm

30 cm

01. D 08. B

24 cm

02. B 09. E

24 cm

24 cm 03. C 10. E

24 cm 90 cm 04. A 11. B

24 cm 05. D 12. D

06. D 13. C

07.
D

Na figura anterior, que representa o projeto de uma

escada de 5 degraus de mesma altura, o comprimento

Seção

Enem

total do corrimão é igual a

A) 1,8 m. C) 2,0 m. E) 2,2 m. 01. D 02. C

B) 1,9 m. D) 2,1 m.

trigonométrico 02 E

ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA O arco de circunferência contido num ângulo central é chamado de arco correspondente a esse ângulo.

Dois pontos, **A** e **B**, de uma circunferência dividem-na em Como a todo ângulo central de **C** corresponde um

duas partes denominadas **arcos**; **A** e **B** são as extremidades único arco de **C** contido nesse ângulo, e a todo arco de **C**

de cada um desses arcos, que indicaremos por corresponde um único ângulo central de **C**, a medida de um A^1B ou B^1A .

ângulo central, relativo a uma circunferência, e a medida do

B B arco correspondente, numa mesma unidade, são iguais.

B

C

$A A A O B^1 B^1 A$

Se **A** coincide com **B**, temos um arco de uma volta e um **A**

arco nulo.

$$\begin{aligned} m(\text{AOB}) \\ = \\ m(\text{A}^1\text{B}) \end{aligned}$$

$$\text{A} \equiv \text{B} \quad \text{A} \equiv \text{B}$$

MEDIDAS DE ÂNGULOS

arco de 1 volta arco nulo **E ARCOS**

Se **A** e **B** são as extremidades de um mesmo diâmetro,

temos um arco de meia-volta. **Medida em graus**

Dividindo-se uma circunferência em 360 partes congruentes

o: centro do círculo entre si, cada um desses arcos é um arco de um grau (1°). **B A O A¹B** : arco de meia-volta Dividindo-se um arco de 1° em 60 partes congruentes

entre si, cada um desses arcos mede um minuto ($1'$).

Dividindo-se um arco de $1'$ em 60 partes congruentes entre si,

ÂNGULO CENTRAL cada um desses arcos mede um segundo ($1''$). Portanto, $1^\circ = 60'$ e $1' = 60''$.

Todo ângulo coplanar com uma circunferência **C**, cujo Para um arco de circunferência com medida **a** graus,

vértice é o centro de **C**, é denominado ângulo central **b** minutos e **c** segundos, escrevemos $a^\circ b' c''$. relativo a **C**.

Radiano

C B Arco de 1 radiano (rad) é o arco cujo comprimento é igual

à medida do raio da circunferência que o contém.

O

A r

O α r arco 1 rad

r

A^1B : arco correspondente ao ângulo central

Frente E Módulo 02

Um modo de definirmos o ângulo de 1 radiano é

Exemplos

caracterizando-o como o ângulo correspondente a um arco

1º) B 2º) B

de comprimento igual ao do seu raio.

Indicando por a a medida, em radianos, de um arco de

comprimento A contido numa circunferência de raio r , temos: $\frac{A}{r} = \alpha$

r

1º) o:
centro
do
círculo

O Arco orientado πA^1B tem medida rad ou 90°

r^2

2º) o:
centro
do
círculo

a $\widehat{BOA}$ Arco orientado πB^1A tem
medida $-\text{rad}$ ou -90° $2 = r$



É importante observar que a medida de um ângulo,

Ciclo trigonométrico

em radianos, só é igual ao comprimento de seu arco se

$$r = 1.$$

As medidas de arcos de circunferências em graus e
em

O A x

radianos são diretamente proporcionais:

$360^\circ \quad 180^\circ = 2\pi \quad \pi$ Toda circunferência orientada, de
centro O e raio

unitário, na qual escolhemos um ponto origem dos
arcos,

Esse fato nos possibilita obter uma forma de
conversão

é denominada circunferência trigonométrica ou ciclo
de unidades através de uma regra de três simples:

trigonométrico. Adotaremos como origem dos arcos o ponto A de interseção do ciclo com o semieixo positivo

medida em graus medida em radianos

das
abscissas
Ox.

a _____ a

No ciclo trigonométrico, a medida absoluta a, em radianos,

180° _____ p de um arco e o comprimento desse arco são iguais, pois π

$$a \cdot \frac{\pi}{180} = e \cdot r = 1 \cdot r$$



$180^\circ = \alpha$ Logo, podemos associar cada número real a um π único ponto **P** do ciclo trigonométrico com o seguinte

procedimento

Arco orientado



Se a
 $= 0$,
tomamos
 $P \equiv A$.



Em Trigonometria, adotamos o sentido anti-horário
de Se $a > 0$, percorremos o ciclo no sentido anti-horário.



percurso como o positivo e o sentido horário de
percurso Se $a < 0$, percorremos o ciclo no sentido horário. como
o negativo.



$$A \equiv P A A$$

P

$$m(A^1P) = 0 \quad m(A^1P) = a > 0 \quad m(A^1P) = a < 0$$

Todo arco de circunferência não nulo no qual adotamos um

sentido de percurso é chamado de arco orientado. O ponto **P** é a imagem de a no ciclo trigonométrico.

64 Coleção Estudo

Arcos e ciclo trigonométrico

Convenções ARCOS CÔNGRUOS

i) O sistema de coordenadas xOy divide a circunferência

Consideremos **P** imagem de um arco de 30° no ciclo trigonométrica em quatro quadrantes:

trigonométrico

y

90°

B

P

30°

$$A' 2.^{\circ} Q 1.^{\circ} Q 30^{\circ} 180^{\circ} 0^{\circ} \equiv 360^{\circ} O O A x$$

$$3.^{\circ} Q 4.^{\circ} Q$$

$$B' 270^{\circ}$$

No sentido anti-horário, dando 1, 2, 3, ... voltas

ii) completas, obtemos os arcos de $30^{\circ} + 1.360^{\circ} = 390^{\circ}$, Será omitido o símbolo rad nos arcos trigonométricos

em radianos. $30^{\circ} + 2.360^{\circ} = 750^{\circ}$; $30^{\circ} + 3.360^{\circ} = 1110^{\circ}$, ..., todos

associados
a P.

iii) Como todo arco trigonométrico tem como extremidade

um mesmo ponto, denotaremos o arco apenas pelo Também no sentido horário, dando 1, 2, 3, ... voltas

outro ponto. completas, obtemos os arcos de $30^{\circ} - 1.360^{\circ} = -330^{\circ}$,

$30^{\circ} - 2.360^{\circ} = -690^{\circ}$; $30^{\circ} - 3.360^{\circ} = -1050^{\circ}$, ..., todos

Exemplos

associados
a **P**.

1º) Partindo de **A** e percorrendo, no sentido anti-horário,

um arco de comprimento π Logo, podemos associar ao ponto **P** infinitos arcos de , obtemos o arco de . 5 5 medida positiva, bem como infinitos arcos de medida **MATEMÁTICA** π negativa. Tais arcos podem ser representados por:

$$P \pi 30^\circ + k.360^\circ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ou, em radianos, } + k.2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

A 6

Como os arcos têm a mesma origem, **A**, e a mesma imagem, **P**, dizemos que eles são côngruos entre si ou,

2º) simplesmente, côngruos. Partindo de **A** e percorrendo, no sentido horário, um

arco de comprimento 2, obtemos o arco -2 .

As medidas dos arcos côngruos a um arco de medida a

são
dadas
por:

$$A a + k.2\pi; k \in \mathbb{Z} \text{ ou, em graus, } a + k.360^\circ; k \in \mathbb{Z}$$

Se $0 \leq a < 2\pi$ (ou $0^\circ \leq a < 360^\circ$), o arco de medida a

é a determinação principal ou a 1ª determinação

Obtemos, assim, o ciclo trigonométrico em radianos

não negativa desses arcos congruos entre si.

e em graus.

Notemos que a diferença entre as medidas de dois arcos 2π 90° congruos entre si é igual ao produto de um número inteiro 2π 120° 3π 60° 14π 135° 45° por 2π (ou é múltiplo de 360°), isto é, sempre equivale a 2π 150° 30° um número inteiro de voltas completas.

3

$2\pi \equiv 360^\circ$ **Exemplos** $0 \equiv 360^\circ$

Os arcos de medidas 2π 13π 210° 330° **1º)** são congruos entre si, pois: $2\pi + 13\pi = 15\pi$ $210^\circ + 330^\circ = 540^\circ$ $15\pi \equiv 3\pi$ $540^\circ \equiv 360^\circ$

2º) $27 \pi 6\pi$ Os arcos de medidas e não são congruos
Analogamente, temos: $7 \ 7$

entre si, pois $27 \ P \) \ 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ \ \pi \ 6 \ \pi_3$
 $- = 3 \ p$ (não é um produto de $y \ 7 \ 7$

um inteiro por $2p$).

3º) $P_1 (30^\circ)$ Os arcos de medidas $1 \ 110^\circ$ e 390° são
congruos

entre si, pois: $1 \ 110^\circ - 390^\circ = 720^\circ = 2.360^\circ$
 30°

$30^\circ \ O \ A \ x$

4º) Os arcos de medidas -30° e 320° não são
congruos

entre si, pois $-30^\circ - 320^\circ = -350^\circ$ (não é
múltiplo $(180^\circ + 30^\circ) \ P_3$ de 360°).

SIMETRIAS $P \) \ 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ_4 \ y$

Consideremos o ponto P associado à medida 30° , no
ciclo $_1 \ P_1 (30^\circ)$

trigonométrico.

$y \ 30^\circ$

$O \ 30^\circ \ A \ x$

$P \ (360^\circ - 30^\circ)_4$

$P_1 (30^\circ)$

O A x Temos, então:

y

$(180^\circ - 30^\circ) P_2 P_1 (30^\circ)$

Pelo ponto P , traçando três retas, uma delas perpendicular

ao eixo das ordenadas, outra que passa pela origem do O A x

sistema, e a terceira perpendicular ao eixo das abscissas, $(180^\circ + 30^\circ) P P (360^\circ - 30^\circ)_{34}$ obtemos os pontos P , P e P , respectivamente. $_{234}$

y

Generaliza
temos:

$P_2 P (30^\circ)_1$ i) Sendo a uma medida em graus:

y

O A x

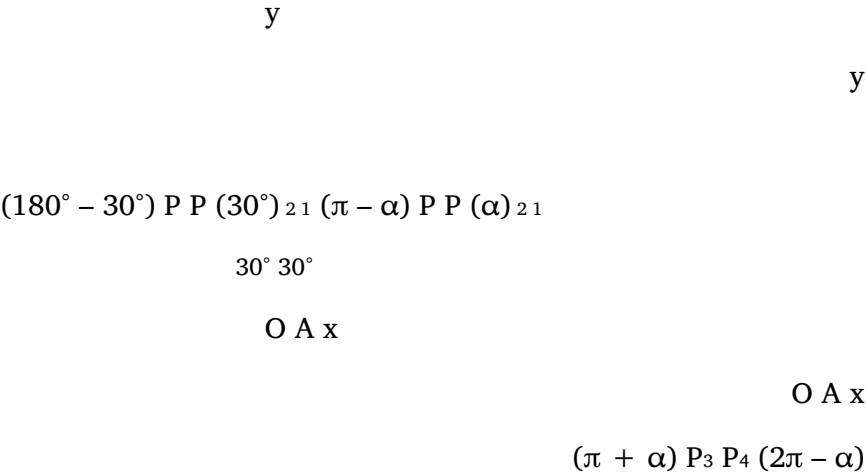
$P P_{34} (180^\circ - \alpha) P P (\alpha)_{21}$

O A x

(ou correspondentes) do ponto P Os pontos P , P e P são chamados de simétricos _{2 3 4} $(180^\circ + \alpha)$ P₃ P₄ $(360^\circ - \alpha)$ nos diversos quadrantes. ₁

E suas medidas x $(0^\circ \leq x \leq 360^\circ)$ são:

P) $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ ₂ ii) Sendo a uma medida em radianos:



66 Coleção Estudo

Arcos e ciclo trigonométrico

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 03. (PUC-SP)

Na figura, têm-se 3 circunferências de centros A, B e C, tangentes duas a duas. As retas QC e PT são

01. perpendiculares. Sendo 4 m o raio da circunferência maior,

(Unimontes-MG–2007) Quando os ponteiros de um

relógio marcam 1h50min, qual a medida do ângulo central quantos metros devemos percorrer para ir de **P** a **Q**,

formado por eles? seguindo as flechas?

A) 120° B) 115° C) 110° D) 95° A) 2p

B)
3p

02. (FUVEST-SP) O perímetro de um setor circular de raio **R** C) 4p T
A B P C

e ângulo central medindo a radianos é igual ao perímetro D) 6p

A) π 2π π B) 2 C) 1 D) E) 3 3 2 Q de um quadrado de lado **R**. Então,
a é igual a p E) 12

03. (UFSCar-SP) Se o ponteiro dos minutos de um relógio **04.**
(UFSJ-MG) Na figura a seguir, está representado um arco

mede 12 centímetros, o número que **mELHoR** aproxima a circular
de espessura desprezível, em repouso, de 1 m de

distância em centímetros percorrida por sua extremidade raio,
sendo o diâmetro AB perpendicular ao diâmetro CD e

em 20 minutos é (Considere $p = 3,14$) A o ponto de contato do aro
com a superfície lisa e reta.

A) 37,7 cm. D) 12 cm. B

B) 25,1 cm. E) 3,14 cm.

C) 20 cm. C D

04. (FUVEST-SP) Um arco de circunferência mede 300° e seu A
comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo

da medida do raio, em metros? Considerando $p = 3,14$, é **CoRRETo**

afirmar que, se o

aro rolar, sem deslizar, ininterruptamente, para a direita,

A) 157 B) 284 C) 382 D) 628 E) 764

parando depois de 21,98 m, então a figura correspondente

nesse momento é a que está na alternativa **MATEMÁTICA**

05. (PUC Minas) Um ângulo central de uma circunferência de

A) A C) C

raio 5 centímetros intercepta um arco de circunferência de

24 centímetros de comprimento. A medida desse ângulo,

em graus, é D C A B

757 864

A) D)

π π B D

786 983 B) B D) D

B) E)

π π

C) 805 C D B A

π

EXERCÍCIOS PROPOSTOS A C

05. (PUC Minas) Ao projetar prédios muito altos, os engenheiros

01. ☐ devem ter em mente o movimento de oscilação, que é (FUVEST-SP) Considere um arco AB de 110° numa

circunferência de raio 10 cm. Considere, a seguir, um arco típico de estruturas de arranha-céus. Se o ponto mais

□ A B ' ' de 60° numa circunferência de raio 5 cm. Dividindo-se alto de um edifício de 400 m descreve um arco de $0,5^\circ$,

o comprimento do arco □ □ AB pelo do arco A B ' ' (ambos a medida do arco descrito por esse ponto, em metros, é

02. medidos em cm), obtém-se 10π A) p D) 11 11 9 22 A) B) 2 C) D) E) 11 6 3 3 3 π 11 π B) E) 4 10 (UFRGS-RS) As rodas traseiras de um veículo têm

4,25 metros de circunferência cada uma. Enquanto as rodas 4π C) 3 dianteiras dão 15 voltas, as traseiras dão somente 12 voltas.

A circunferência de cada roda dianteira mede **06.** (UFRGS-RS) Os ponteiros de um relógio marcam duas horas

A) 2,125 metros. C) 3,4 metros. e vinte minutos. O **mENoR** ângulo entre os ponteiros é

B) 2,25 metros. D) 3,75 metros. A) 45° B) 50° C) 55° D) 60° E) 65°

Editora Bernoulli **67**

Frente E Módulo 02

07. (PUC-SP) João e Maria costumavam namorar atravessando **12.** (UFMG) A medida, em graus, de um ângulo que mede

um caminho reto que passava pelo centro de um canteiro $4,5 \text{ rad}$ é

circular, cujo raio mede 5 m. Veja a figura 1. 4 5 , 810 A) C) E)

canteiro B) 4,5p D) 810

P C 13. (PUC RS) Em uma circunferência de 5 cm de raio, marca-se

caminho do passeio um arco de 8 cm de comprimento. Em radianos, esse

canteiro 8 arco vale 8 π

A) 5p B) 8p C) 8 D) E)

Figura 1 5 5

Certo dia, após uma desavença que tiveram no ponto de

SEÇÃO ENEM

partida **P**, partiram emburrados, e, ao mesmo tempo, para

o ponto de chegada **C**. Maria caminhou pelo diâmetro do **01**. (Enem–2004) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004,

canteiro e João andou ao longo do caminho que margeava o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado “Mineirinho”,

o canteiro (sobre o círculo), cuidando para estar sempre à conseguiu realizar a manobra denominada “900”,

“mesma altura” de Maria, isto é, de modo que a reta MJ, na modalidade *skate* vertical, tornando-se o segundo atleta

formada por Maria e João, ficasse sempre perpendicular no mundo a conseguir esse feito. A denominação “900”

ao diâmetro do canteiro. Veja a figura 2. refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em

J torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

A) uma volta completa. D) duas voltas e meia.

B) uma volta e meia. E) cinco voltas completas.

P C C) duas voltas completas. M

02. (Enem–2009) Considere um ponto **P** em uma circunferência de raio **r** no plano cartesiano. Seja **Q** a projeção ortogonal de **P** sobre o eixo **x**, como mostra a figura, e suponha que

Figura 2

o ponto **P** percorra, no sentido anti-horário, uma distância

Quando a medida do segmento PM, percorrido por Maria, $d \leq r$ sobre a circunferência.

for igual a $7,5 = 5 + 5$ y metros, o comprimento do arco de 2

circunferência P^1J , percorrido por João, será igual a $r \left(10\pi \right) \left(2\pi \right)$
A) m . D) m . || |||| || 3 3 () ()

B) $2 \left(\pi \right) O Q x m p m$. E) || || . 3 () Então, o ponto **Q** percorrerá, no eixo **x**, uma distância

08. C) $\left(5\pi \right)$ dada por m || || . 3 () $\left(d \right) \left(r \right)$ A) $r \left| 1 - \sin \right|$. D) $r \sin \left| \right|$. $\left(r \right) \left(d \right)$ (UFOP-MG) Um ciclista de uma prova de resistência deve

percorrer 500 km em torno de uma pista circular de raio $\left(d \right) \left(r \right)$
B) $r \left| 1 - \cos \right|$. E) $r \cos \left| \right|$. 200 m. O número aproximado de voltas que ele deve dar é $\left(r \right) \left(d \right)$

A) 100 B) 200 C) 300 D) 400 E) 500 (d) **09.** C) r |
 $1 - \operatorname{tg} \left| \right|$. (UniBH-MG) Considerando $p = 3,14$, o número de (r)
 voltas completas que uma roda de raio igual a 40 cm,

incluindo o pneu, dará para que o
 automóvel se desloque **GABARITO** 1
 quilômetro será de

A) 290 B) 398 C) 2 000 D) 3 980
Fixação 10. (UFC-CE) Um relógio marca que faltam 15
 minutos para as 01. B 02. B 03. B 04. C 05. D

duas horas. Então, o **mENoR** dos
 dois ângulos formados Propostos
 pelos ponteiros das horas e dos minutos mede

A) $142^{\circ}30'$ C) $157^{\circ}30'$ E) $127^{\circ}30'$ 01. C 04. A 07. A 10. A 13. D
 B) 150° D) 135° 02. C 05. D 08. D 11. B

03. D 06. B 09. B 12. C

11. (UFPA) Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos
Seção Enem de um relógio em 50 minutos?

A) 16π 5π 4π 4π 3π 01. D 02. B B) C) D) E) 9π 3π 3π 3π

68 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Funções seno e cosseno 03 E

FUNÇÃO PERIÓDICA Dizemos também que OP é o seno de AOP ou de A^1P .₂

$p \text{ sen AOP} = \text{sen } A^1P = OP_2 \in$ Uma função $y = f(x)$ é periódica, de período p , se existe

$\square$, $p > 0$, tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo x pertencente

ao domínio da função.

O eixo Oy passa a ser denominado, então, como eixo

FUNÇÃO SENO dos senos.

No ciclo trigonométrico a seguir, a é a medida do ângulo **GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO**

AOP, e o triângulo OP P é retângulo.₁

(SENOIDE)

$$By P^{13}$$

$$112$$

$$\alpha^{12}$$

$$C \alpha 213\pi 2 O P A x 21 O \pi \pi \pi \pi 2\pi x$$

$$6432$$

$$D$$

$$-1$$

Utilizando a definição de seno para ângulos agudos num A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é,

triângulo retângulo, podemos escrever: $-1 \leq \sin x \leq 1$, para todo x real.

$\sin P P_1 a =$, em que $OP = 1$, e $P P$ é a ordenada de P , ou seja: OP A função seno é periódica, e seu período é 2π .



$$\sin a = \text{ordenada de } P$$



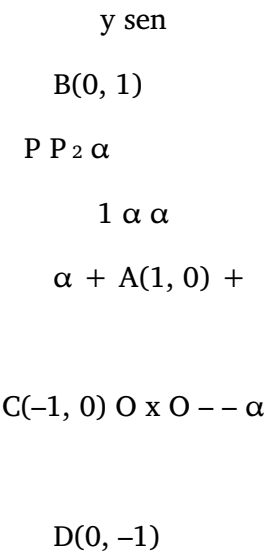
A função seno é a função, de **SINAL** $\square$ em $\square$, que para todo



número a associa a ordenada do ponto **P** (imagem de a no Vamos analisar o sinal de $\sin a$ quando **P** (imagem de a no ciclo trigonométrico). no ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.



$\sin: \square \rightarrow \square: a \rightarrow \sin a = OP_2$ Eixo dos senos:

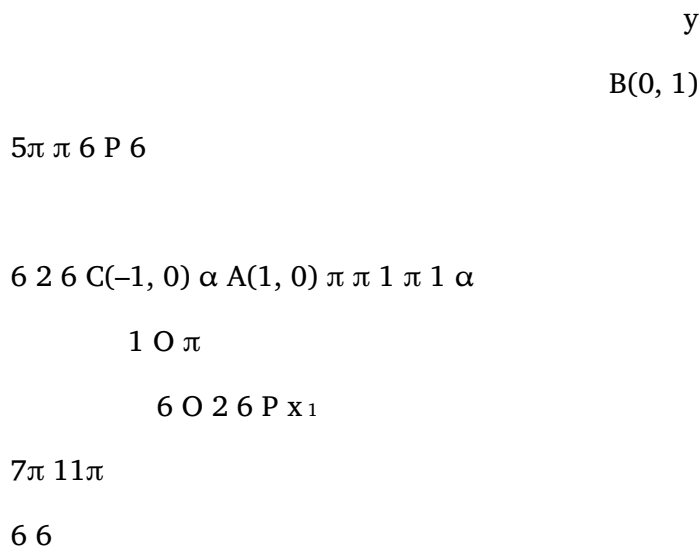


α

Frente E Módulo 03

VALORES NOTÁVEIS FUNÇÃO COSSENO

No ciclo trigonométrico a seguir, a é a medida do ângulo α em radianos, e o triângulo OPQ é retângulo.



Utilizando a definição de cosseno para ângulos agudos

em um triângulo retângulo, podemos escrever:

$$\cos a = \frac{OP}{1}, \text{ em que } OP = 1, \text{ e}$$

OP é a abscissa de P, ou seja: $OP = \cos a$

$$\cos a = \text{abscissa de P}$$

A função cosseno é a função, de $[-\pi, \pi]$, que para todo número a associa a abscissa do ponto P (imagem de a no

círculo trigonométrico).

$$\cos: [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]: a \rightarrow \cos a = OP$$

y

B(0, 1)

sen P

$$\sin a = \text{ordenada de P}$$

$$\cos(-a) = \cos a \quad \sin(-a) = -\sin a$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos a \quad \sin(\pi - a) = \sin a$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos a \quad \sin(\pi + a) = -\sin a$$

Dizemos, também, que OP é o cosseno de AOP ou de $\angle AOP$

e indicamos:

$$\cos AOP = \cos \angle AOP = OP$$

SENOS DE ARCOS CÔNGRUOS

o eixo Ox passa a ser denominado, então, como eixo dos cossenos.

Qualquer que seja o número real a , os arcos de medida a

GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO

e $a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem A e a mesma extremidade P . Logo:

y



2



$$\sin(a + 2k\pi) = \sin a, k \in \mathbb{Z}$$



$$2\pi, \pi, 0, -\pi, -2\pi$$



1

1º) $\text{sen } 750^\circ = \text{sen } 390^\circ = \text{sen } 30^\circ =$

2

–
1

2º) 29π A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, A determinação principal do arco de medida rad $3 -1 \leq \cos x \leq 1$, para todo x real.

mede $5\pi \ 29\pi \ 5\pi \ 3$ rad. Então, $\text{sen } = \text{sen } = - \frac{1}{2}$. A
função cosseno é periódica, e seu período é 2π .



70 Coleção Estudo



Funções seno e cosseno

$$1^\circ) \cos 8p = \cos 6p = \cos 4p = \cos 2p = \cos 0 = 1$$

ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes. 20π 2º) A determinação principal do arco de medida rad 3 Vamos analisar o sinal de $\cos \alpha$ quando α (imagem de α) no

$$\alpha \text{ mede } 2\pi \text{ } 20\pi \text{ } 2\pi \text{ } 1 \text{ rad. Então, } \cos \alpha = \cos \alpha = - \cdot \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}$$

α

$- +$

O $\cos$ PERÍODO DE FUNÇÕES

$- +$ ENVOLVENDO SENO E COSSENO α

α

Sabendo-se que as funções seno e cosseno são periódicas,

VALORES NOTÁVEIS e seu período é $2p$, podemos calcular o período p das

seguintes
funções:

$$5\pi \quad \pi \quad 2 \quad \text{i)} f(x) = \sin(mx + n) \Rightarrow p = \pi, m \neq 0$$

$$6 \quad 6 \quad m$$

$$\pi \quad \pi$$

$$6 \quad 6 \quad 0 \quad 2 \quad \text{ii)} f(x) = \cos(mx + n) \Rightarrow p = \pi, m \neq 0$$

$$6 \quad 2 \quad 2 \quad 6$$

$$7\pi \quad 11\pi$$

6 6 **Demonstração:**

i) Seja $f(x) = \sin(mx + n)$, $m \neq 0$.

MATEMÁTICA

3π π Como o período da função $\sin x$ é igual a 2π , obtemos

$$4 \quad 4$$

π π um período de $f(x)$ quando o arco $(mx + n)$ variar,

4 4 por exemplo, de 0 a 2π . o

$$\pi \quad 12 \quad \cos \quad 12 \quad \text{Assim: } \pi \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad n \quad mx + n = 0 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{7} - \frac{n}{m}$$

$$2mx + n = 2\pi n p \Rightarrow x = -\frac{m}{\pi} \pi$$

3 3 Como o período **p** é positivo, temos:

$$\pi \pi$$

$$\frac{3}{m} \frac{3}{m} \frac{2}{m} \frac{\pi}{m} \frac{n}{m} \frac{n}{m} \frac{2}{m} \left(\frac{\pi}{m} p \right) = \left| \Delta x \right| = - - -$$

$$1 \cos$$

π 2 2 ii) A demonstração é análoga. π

$$3 \frac{3}{m}$$

4π 5π **Exemplos**

$$3 \frac{3}{m}$$

$$\begin{aligned} &1^\circ) \\ &f(x) \\ &= \\ &\text{sen} \\ &2x \end{aligned}$$

COSSENOS DE ARCOS CÔNGRUOS

$$m = 2\pi \Rightarrow p = \Rightarrow p = p \frac{2}{m}$$

y

Qualquer que seja o número real a, os arcos de medidas a 1

e $a + 2kp$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem **A** e a mesma extremidade **P**. Logo:



$$\cos (a + 2kp) = \cos a, k \in \mathbb{Z} -1$$



Editora Bernoulli 71



Frente E Módulo 03

2º) x Gráfi co: $f(x) = \cos 2 y$

$$m = 1 \ 2 \ \pi \Rightarrow p = \Rightarrow p = 4p \ 2 \ 2 \ 1 \ y = 1 + \text{sen } x \ 2$$

y

$$1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\sin x = \sin \left(x + 2\pi k \right)$$

$$2\pi$$

$$2\pi$$

$$\sin x = \sin \left(x + 2\pi k \right)$$

$$\sin x = \sin \left(x + 2\pi k \right)$$

Resolução

RELAÇÃO FUNDAMENTAL Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, tem-se:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq \cos x - 1 \leq 0$$

ENTRE SENO E COSSENO

Utilizando as razões trigonométricas num triângulo

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

retângulo, já havíamos deduzido que:

01. (VUNESP-SP) Uma máquina produz diariamente



$\sin^2 a + \cos^2 x$ dezenas de certo tipo de peças.
Sabe-se que o $a = 1$ custo de produção $C(x)$ e o valor de venda $V(x)$ são

dados, aproximadamente, em milhares de reais,

Tal relação é conhecida como a Relação Fundamental da

respectivamente, pelas funções:

Trigonometria, e pode ser demonstrada facilmente no ciclo

trigonométrico. $\left(x\pi \right) \left(x\pi \right) C(x) = 2 - \cos$ e $V(x) = 3^{1/2} \sin$, $0 \leq x \leq 6 \parallel 6 \parallel 12 \parallel \pi$ Tomemos um ângulo a tal que $0 < a < \pi$ (os demais casos 2 O lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de são demonstrados de maneira análoga). peças é

A) 500 C) 1 000 E) 3 000

y

B) 750 D) 2 000

02. (PUC Minas) Se $\cos a = -\frac{1}{2}$ e a é um ângulo do terceiro 4 a quadrante, então o valor de $\sin a$ é igual a α

O P x 2 15 11 15 A) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

B) $-\frac{1}{4}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Assim, temos: $\sin \theta = \frac{OP}{OP} = \sin \theta$, $\cos \theta = \frac{OP}{OP} = \cos \theta$ e $\tan \theta = \frac{OP}{OP} = \tan \theta$.
03. (UFES) O período e a imagem da função $y = \sin(x - 2)$ são, respectivamente, $(\pi, 1]$ e $[-1, 1]$.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos: $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

04. (UFU-MG) Se f é a função real dada por $f(x) = 2 - \cos(4x)$,

01. então é **Correto** afirmar que Dar o domínio, o conjunto imagem e esboçar o gráfico de

$y = 1 + \sin x$. A) o gráfico de f intercepta o eixo dos x .

Resolução: B) $f(x) \leq 3$ e $f(x) \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

C) $f(x) \leq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Domínio: $D = \mathbb{R}$

D)
 $f(x)$
 $<$
 0 .

Conjunto imagem:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 3 \cdot 0 \leq 1 + \sin x \leq 2 \Rightarrow \text{Im} = [0, 2] \text{ E) } f(x) \geq \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

72 Coleção Estudo

Funções seno e cosseno

05. (VUNESP-SP) Observe o gráfico. **04.** (UFES) Qual das equações representa a função

y trigonométrica cujo gráfico está na figura a seguir?

2 y

$\pi/2$

O $2\pi/6\pi\pi/3\pi\pi$

$3x/2/2/2/3\pi$

$-2-2\pi/3$ O $\pi\pi/2\pi x$

2 2

Sabendo-se que ele representa uma função trigonométrica, -2

a função y(x) é A) y = 2 sen x D) y = 2 sen 2x

A) -2 cos 3x D) 3 sen 2x x x

B) y = sen x E) y = 2 sen

B) -2 sen 3x E) 3 cos 2x 2 2

C) 2 cos 3x C) y = sen 2x

05. (Unimontes-MG–2008) Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

$f(\theta) = \cos \theta$. Assim, podemos afirmar que $f(\frac{\pi}{3}) =$

01. (FJP-MG–2010) Observe a seguinte figura que lembra um 3 A) $f(2\pi) - f(0) = 1$ B) $f(2\pi) - f(0) = 0$ C) $f(2\pi) - f(0) = 2$ D) $f(2\pi) - f(0) = -1$

B) $f(2\pi) - f(0) = 0$ D) $f(2\pi) - f(0) = -1$

12 m

06. (Mackenzie-SP) A função real definida por $f(x) = k \cdot \cos(px)$, $k > 0$ e $p > 0$, tem período 7π e conjunto imagem $[-7, 7]$.

15,70 m Então, k vale

arco de uma senoide para fazer a fachada da Igreja da 7 2

MATEMÁTICA B) Parece que o arquiteto Oscar Niemeyer se inspirou no A) 7 C) 2 E) 14

Pampulha. Se assim foi, das funções a seguir, a que mais 2 7 D)

se aproxima da função que o inspirou é **07.** (UFPel-RS) O conjunto imagem da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

A) $f(x) = 12 \sin(5x)$ B) $f(x) = 12 \sin(x)$ C) $f(x) = 12 \sin(x - \frac{\pi}{2})$ D) $f(x) = 12 \sin(x + \frac{\pi}{2})$ E) $f(x) = 12 \sin(x - \pi)$

B) $f(x) = 12 \sin(x)$ C) $f(x) = 12 \sin(x - \frac{\pi}{2})$ D) $f(x) = 12 \sin(x + \frac{\pi}{2})$ E) $f(x) = 12 \sin(x - \pi)$

02. (FUVEST-SP) O menor valor de $\cos x$, com x real, é (FUVEST-SP) A figura a seguir mostra parte do gráfico da

$$y = \cos x$$

função

$$y = \cos x$$

$$y = \cos x$$

09. (Unimontes-MG-2008) Dado $\sin x = -\frac{1}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

O valor de $y = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$ é

$$A) -\frac{3}{4} \quad B) \frac{3}{4} \quad C) \pm \frac{3}{4} \quad D) \frac{3}{4}$$

$$A) -\frac{3}{4} \quad B) \frac{3}{4} \quad C) \pm \frac{3}{4} \quad D) \frac{3}{4}$$

$$A) \sin x \quad D) 2 \sin 2x$$

B) $2 \sin(x)$ C) $2 \sin(x - \frac{\pi}{2})$ D) $2 \sin(x + \frac{\pi}{2})$ E) $2 \sin(x - \pi)$

10. (Cesgranrio) Seja $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = -3 \cos x$ C) $2 \sin(x)$ D) $2 \sin(x - \frac{\pi}{2})$ E) $2 \sin(x + \frac{\pi}{2})$

03. 1 O valor de x que torna $f(x)$ máximo é (Cesgranrio) Se $\sin(x) - \cos(x) = 0$, o valor de 25π A) 0 D) $\sin(x) \cos(x)$ é igual a 3

A) $333\pi - 3\pi$ – C) E) B) E) 168232

B) $343\pi - 4\pi$ – D) C) 384

Editora Bernoulli **73**

Frente E Módulo 03

11. (UFES) Considere que $V(t)$, o volume de ar nos pulmões

SEÇÃO ENEM

de um ser humano adulto, em litros, varia de, no mínimo,

2 litros a, no máximo, 4 litros, sendo t a variável

tempo, **01.** (Enem–2010) Um satélite de telecomunicações, t minutos

em segundos. Entre as funções a seguir, a que **mELHoR** após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de

descreve $V(t)$ é distância do centro da Terra. Quando r assume seus

A) $2 + 2\sin(\pi t)$ valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o π t apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para $3 \leq t \leq 3$

B) $4 + 2\sin(\pi t)$ esse satélite, o valor de r em função de t seja

dado por:

$$3 \sqrt{5865}$$

$$C) 5 + 3 \cdot \sin \left(1015 + \cos(0.06) \cdot t \pi \right) \cdot r \cdot t =$$

$\sqrt{3}$ Um cientista monitora o movimento desse satélite para

D) $1 + 3 \cdot \sin$ controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, $\pi \cdot t$ ele precisa calcular a soma dos valores de r , no apogeu $\sqrt{3}$

E) $3 + \sin(\pi \cdot t)$ concluir que, periodicamente, S atinge o valor de $\sqrt{3}$ e no perigeu, representada por S . O cientista deveria $3 \sqrt{3}$

A) 12 765 km. D) 10 965 km.

12. B) 12 000 km. E) 5 865 km. (UEL-PR) Seja x a medida de um arco em radianos.

C)
11
730
km.

O número real a , que satisfaz as sentenças $\sin x = -3a -$

$e \cos x = a - 2$ **02.** As vendas de uma certa empresa são muito oscilantes, é tal que 2 devido à sazonalidade do produto que fabrica. O cálculo

A) $a \geq 7$ do número de produtos vendidos pode ser fornecido pela

B) 5 seguinte função, cujos valores são expressos em milhares $\leq a < 7$

C) 3 de reais: $\leq a < 5$ ($\pi.t$) D) $0 \leq a < 3$ $V(t) = 250 - 50.\text{sen} \left| \right|$, em que t representa cada 2 () E) $a < 0$ mês do ano;

13. (UFJF-MG) A figura a seguir mostra, no plano cartesiano, Com base nessas informações, as vendas da empresa são ($t = 1$: janeiro; $t = 2$: fevereiro, e assim por diante).

uma circunferência centrada na origem, de raio igual a 1,

A) maiores nos meses de janeiro, maio e setembro.

passando pelos pontos B e C. Nessa figura, os pontos o,

C e D são colineares, os segmentos de retas AC e BD outubro e dezembro. B) maiores nos meses de fevereiro, abril, junho, agosto,

são paralelos ao eixo y e q é o ângulo que o segmento

C) maiores nos meses de março, julho e novembro.

de reta OD faz com o eixo x .

D) menores nos meses de fevereiro, abril, junho, agosto, y outubro e dezembro.

D

C E) nulas nos meses de fevereiro, abril, junho, agosto,

outubr
e
dezem

θ

O A B x **GABARITO**

01. C 02. A 03. C 04. B 05. B

Com respeito a essa figura, é **CoRRETo** afirmar que

Propostos

A) $OA = \sin \theta$

01. B 04. A 07. E 10. D 13. C

B) $OC = \cos \theta$

02. B 05. B 08. B 11. E

C) $BD = AC$ 03. C 06. C 09. B 12. D

OA

AC OD Seção Enem

D) $= BD$ OB 01. B 02. C

E) $OB_2 + BD_2 = 1$

74 Coleção Estudo **MATEMÁTICA**
MÓDULO FRENTE Funções tangente,
cotangente, 04 E secante e
cossecante

FUNÇÃO TANGENTE Gráfico

Pela origem **A** dos arcos, consideremos o eixo AT paralelo

a Oy, passando por **A**. $\pi \pi \pi \pi 3\pi$

Temos que $\frac{\pi}{6} \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{3} \frac{\pi}{2} 2\pi$ é a medida do ângulo agudo AOP, e o

triângulo OAT é retângulo.

$$y = \tan x \quad B(0, 1) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

T

P

$$C(-1, 0) \leq x \leq A(1, 0)$$

O x

$$\frac{\pi}{3} \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3} \frac{\pi}{6}$$

Portanto, utilizando a definição de tangente para ângulos $\frac{\pi}{6} \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{3} \frac{\pi}{2} 2\pi$ O $\frac{\pi}{6} \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{3} \frac{\pi}{2} 2\pi$

agudos num triângulo retângulo, podemos escrever

$$\tan \alpha = \frac{AT}{OA}$$

, em que $OA = 1$, e AT é a ordenada de T, ou seja:

OA

$\operatorname{tg} a =$ ordenada de T A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$.

que para todo número A a função tangente é a função de $(\pi - \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$, A função tangente é periódica, e seu período é π . $\frac{\pi}{2}$ associa a ordenada do ponto T , interseção de AT com OP (em que P é a imagem de OBSERVAÇÃO a no ciclo trigonométrico).

$$\operatorname{tg}: \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) + k\pi \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{tg}(mx + n) \Rightarrow p = \frac{\pi}{2m}, m \neq 0$$

$$a \rightarrow \operatorname{tg} a = AT$$

y Sinal $B(0, 1)$

P Vamos estudar o sinal de $\operatorname{tg} T$

a quando P (imagem de a no

$C(-1, 0)$ a $A(1, 0)$ ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.

O x

tg

$\alpha \alpha$

$D(0, -1)$ - +

Dizemos, também, que AT é a tangente de AOP ou de A¹P.

$$\operatorname{tg} \widehat{AOP} = \operatorname{tg} \widehat{A^1P} = AT$$

+ -

O eixo AT passa a ser denominado, então, eixo das α

tangentes.

Editora Bernoulli 75

Frente E Módulo 04

Valores notáveis **RELAÇÃO ENTRE**

TANGENTE,

tg SENO E COSSENO

Qualquer que seja $\alpha \in D(\text{tg})$, se $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, existem os triângulos retângulos OAT e OPQ semelhantes. Logo:

$$\frac{OT}{OA} = \text{tg } \alpha$$

$$\frac{OT}{OP} = \frac{1}{\cos \alpha} \text{tg } \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \text{tg } \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \text{tg } \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \text{tg } \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \text{tg } \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \text{tg } \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \text{tg } \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sin \alpha$$

A análise dos sinais de $\text{tg } \alpha$, $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ e o estudo dos

5π casos particulares nos permite concluir que: $\frac{7}{4}\pi - 1$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

13 OUTRAS FUNÇÕES

$$2\pi - \pi$$

3.3 TRIGONOMETRICAS

$$\pi$$

$$3$$

o Função cotangente

π Definiremos a função cotangente utilizando as funções

3 seno e cosseno da seguinte forma:

$$\frac{4\pi}{5\pi} \frac{3}{3} \cos \alpha \cotg$$

$$- \alpha = \frac{\pi}{2}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{3} \sin \alpha$$

Como consequência imediata, temos:

TANGENTES DE ARCOS $\cotg 1 k\pi a = ,$
 $a \neq , k \in \mathbb{Z} \text{ tg } \alpha 2$

Gráfico

CÔNGRUOS $\cotg x$

Qualquer que seja o número real a , os arcos de medidas a

e $a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem A e a mesma

$-\pi \text{ O } \pi 2\pi x$

extremidade P . Logo:



$$\text{tg} (a + 2k\pi), = \text{tg } a, a \in D(\text{tg}), k \in \mathbb{Z}$$



A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$.



Exemplos A função cotangente é periódica, e seu período é π .



$$1^{\circ}) \operatorname{tg} 1080^{\circ} = \operatorname{tg} 720^{\circ} = \operatorname{tg} 360^{\circ} = \operatorname{tg} 0^{\circ} = 0$$



2º) 38 OBSERVAÇÃO π A determinação principal do arco de medida $\operatorname{rad} \frac{3\pi}{2}$ $\frac{38\pi}{2}$ $\frac{38\pi}{2}$ $f(x) = \operatorname{cotg}(mx + n) \Rightarrow p = \frac{m}{n}, m \neq 0$ mede rad . Então: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



76 Coleção Estudo



Funções tangente, cotangente, secante

Função secante RELAÇÃO ENTRE

Definiremos a função secante utilizando a função cosseno, **SECANTE E TANGENTE**

da seguinte forma: **E ENTRE COSSECANTE**



$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **E COTANGENTE**



Gráfico Dividindo os membros de $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ por $\cos^2 \alpha$, sendo $\cos \alpha \neq 0$, temos:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

α

$$\frac{2\pi}{k} \text{ O } \frac{3\pi}{2} \text{ x } \frac{\pi}{2} \text{ 1 + tg } a = \sec a, a \neq \frac{\pi}{2} + kp, k \in \mathbb{Z}$$

Analogamente, dividindo por $\cos a$, sendo $\cos a \neq 0$,
temos:

A imagem da função secante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

A função secante é periódica, e seu período é $2\pi + \cotg a = \operatorname{cosec} a, a \neq kp, k \in \mathbb{Z}$.

OBSERVAÇÃO

Função cossecante $f(x) = \sec(mx + n) \frac{2\pi}{p}$

$\Rightarrow, m \neq 0$ **REDUÇÃO AO 1º**

QUADRANTE MATEMÁTICA

Consideremos os pontos P, P, P e P simétricos no

ciclo_{1 2 3 4} trigonométrico.



Definiremos a função cossecante utilizando a função seno,

da seguinte forma: $B(0, 1) \pi - x$



$\cossec \sin(\pi - x) = \frac{1}{\sin(\pi - x)}$



α

Gráfico $\sin x \sin(-x) \pi x$

$\cossec x = \frac{1}{\cos x}$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\pi + x) - x) \pi + x \pi$

1

$\sin(2$

$P_3(\cos(\pi + x), P_4(\cos(2\pi - x),$

$$-\pi \leq x \leq \pi \quad \sin(x) \geq 0 \quad \sin(2\pi - x) \leq 0$$

$$2\pi - x$$

$$D(0, -1)$$

Se P determina um arco de medida x , $0 < x < \pi$,
então $2\pi - x$

A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, P e P
determinam, respectivamente, arcos de medidas $\frac{\pi}{2} - x$
 $(-1, 1)$. $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} + x$ e $2\pi - x$.

A função cossecante é periódica, e seu período é 2π .
Pelas definições de seno e de cosseno, temos:

OBSERVAÇÃO $P(\cos x, \sin x)$; $\frac{\pi}{2}$

$$P(\cos(-x), \sin(2\pi - x));$$

$$f(x) = \csc(mx + n) \quad 2\pi P(\cos(\frac{\pi}{2} + x), \sin(\frac{\pi}{2} + x)) \text{ e } \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + m \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow m \neq 0 \quad P(\cos(2\pi - x), \sin(2\pi - x))$$

Frente E Módulo 04

Aplicando as simetrias das coordenadas, obtemos:

3º) Reduzindo 310° ao 1° quadrante, temos:

Pontos Abscissas ordenadas B B

$$P_1 \cos 50^\circ \text{ e } P_2 \cos (p - x) = -\cos x \sin (p - x) = \sin x$$

$$P_1 \text{ e } P_2 \cos (p + x) = -\cos x \sin (p + x) = -\sin x \sin 50^\circ$$

$$\cos 50^\circ \Rightarrow O C A C \cos 310^\circ P_1 \text{ e } P_2 \cos (2p - x) = \cos x \sin (2p_1 - x) = -\sin x A$$

Tais relações são válidas para todo número real x . $\sin 310^\circ$

$\sin 310^\circ = -\sin 50^\circ$

Exemplos

1º) Reduzindo ao 1º quadrante, temos: $\sin 310^\circ = -\sin 50^\circ$; $\cos 310^\circ = \cos 50^\circ$;

$$\tan 310^\circ = -\tan 50^\circ; \cot 310^\circ = -\cot 50^\circ;$$

$$\sec 310^\circ = -\sec 50^\circ; \operatorname{cosec} 310^\circ = -\operatorname{cosec} 50^\circ;$$

$$\sin 310^\circ = -\sin 50^\circ; \cos 310^\circ = \cos 50^\circ \Rightarrow$$

RELAÇÕES ENTRE ARCOS

COMPLEMENTARES

Seja x um arco de medida x , $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então:

Considerando um arco de medida x , $0 < x < \frac{\pi}{2}$, sabemos

que $\sin 2\pi - x = -\sin x$; $\cos 2\pi - x = \cos x$; $\tan 2\pi - x = -\tan x$ que seu arco complementar tem medida $\frac{\pi}{2} - x$.

tg 4 sen 4π π sen No ciclo trigonométrico, temos: π
 4 5 5 π π = = ⇒ tg = - tg ; 5 4 π π 5 5 π cos -
 cos π 2 - x 5 5 2

cotg 4 P π 1 1 4 π π₂ = = ⇒ cotg = - cotg ; 5 4 π
 π 5 5 tg - tg 5 5 P₁ x x 4 π 1 1 4 π π sec = = ⇒ sec
 = - sec ; 5 4 π π 5 5 x cos cos π - 0 ≡ 2π 0 5 5

cossec 4π 1 1 4π π cossec = = ⇒ = cossec ; 5 4 π π
 5 5 sen sen 5 5

2º) Reduzindo 220° ao 1º quadrante, temos:

3π

2

B B

C O ⇒ cos 220° cos 40° ((π) ()) π P (cos x, sen x)
 e P || cos - x sen , - x_{1 2} || || || || || 2 2 || O (() ()
)) A sen 40° 40° Pelas definições de seno e cosseno,
 temos:

C A sen 220°

Da congruência dos dois triângulos retângulos
 anteriores,

220° 220°

obtemos:

D D



$$\begin{aligned} \sin 220^\circ &= -\sin 40^\circ; \quad \left(\pi \right) \left(\pi \right) \cos 220^\circ = -\cos 40^\circ; \\ \sin -x &= -\sin x; \quad \cos -x = \cos x; \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \\ 220^\circ &= \text{tg } 40^\circ; \quad \cotg 220^\circ = \cotg 40^\circ; \end{aligned}$$



$\sec 220^\circ = -\sec 40^\circ; \quad \operatorname{cosec} 220^\circ = -\operatorname{cosec} 40^\circ;$ Tais relações são válidas para todo número real x .



78 Coleção Estudo

Funções tangente, cotangente, secante
e cossecante

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Provar que $(1 + \cotg^2 x)(1 - \cos^2 x) = 1$ para todo x real, **01.**
(Unifor-CE) O valor de $\operatorname{tg} 150^\circ + 2 \operatorname{sen} 120^\circ - \cos 330^\circ$

$x \neq kp, k \in \mathbb{Z}$. é igual a

Resolução: 3 A) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$

$$(1 + \cotg^2 x)(1 - \cos^2 x) = \operatorname{cosec}^2(x) \cdot \operatorname{sen}^2(x)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

02. 3 Provar que $\operatorname{tg} x + \cotg x = \sec(x) \cdot \operatorname{cosec}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **02.** (FUVEST-SP) Qual das afirmações a seguir é

Resolução: VERDADEIRA? $\frac{2}{2} \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen} x + \cos x$
A) $\operatorname{sen} 210^\circ < \cos 210^\circ < \operatorname{tg} 210^\circ$ $\operatorname{tg} x + \cotg x = \frac{1}{\cos x} = \sec x$
B) $\cos 210^\circ < \operatorname{sen} 210^\circ < \operatorname{tg} 210^\circ$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$= \sec(x) \cdot \operatorname{cosec}(x) \quad \text{E) } \operatorname{sen} 210^\circ < \operatorname{tg} 210^\circ < \cos 210^\circ$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 03. (UFG-GO-2008) Dois observadores, situados nos pontos A

e B, a uma distância d um do outro, como mostra a figura

01. a seguir, avistam um mesmo ponto no topo de um prédio (UFTM-MG) Se $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ e $3 \cos(x) + \operatorname{sen}(x) = 3$, pode-se

afirmar que de altura H , sob um mesmo ângulo q com a horizontal.

A) $\tan x < -1$ D) ≤ 1

$$\tan x < 1$$

$$2$$

B) $-1 \leq \tan x < -1$ E) $\tan x \geq 1$ 2 **MATEMÁTICA**

C) $- \leq 1$ 1

$$2 \theta \cos \theta \tan x <$$

02. π A d (UFOP-MG-2008) Se $\tan x = a$, $B < x < p$, é **CoRRETo**

$$2$$

afirmar que $\sin(x) + \cos(x)$ vale Sabendo que o ângulo $AB C$ também mede q e

A) $- - 1 a 1 - a$ desconsiderando a altura dos observadores, a altura H C) $2 1 + a 1 + a 2$ do prédio é dada pela expressão

B) $1 + a - + 1 a$ D) $d \left(\theta \right) 1$ A) $H = \sin \mid \mid \cos q$
 $+ a 2 1 + a 2 2 \left(2 \right)$

03. π (FUVEST-SP) Se a é um ângulo tal que $0 < a < e$ $\sin a = a$,

B) $H = d \cos q \sin q 2$

então $\tan(p - a)$ é igual a d C) $H = \tan q \sin q a 1 a 2 - 2$ A) $-$
D) $- a 1 2 - a d 1 a 2 + a$ D) $H = \tan q \sec q$ B) E) $- 2 a 1 a 2 - \left(\theta \right)$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \sec \alpha = \frac{c}{a}$$

04. 1 04. (UEL-PR) A função dada por $f(x) = (\operatorname{tg} x)(\operatorname{cotg} x)$ está (Cesgranrio) Se $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, então o valor de f definida se, e somente se,

$\sin (25^\circ + \alpha) - \sin (88^\circ - \alpha)$ é A) x é um número real qualquer.

05. A) 0 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{4}$ B) $x \neq k2\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$. 3 3 2 3 C) $x \neq k\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$. (UFJF-MG-2006) Dois ângulos distintos, menores que

360° , têm, para seno, o mesmo valor positivo. A soma $k\pi$ D) $x \neq k\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$. 2 desses ângulos é igual a

A) 45° B) 90° C) 180° D) 270° E) 360° E) $x \neq k\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$. 4

Editora Bernoulli **79**

Frente E Módulo 04

05. 4 (Fatec-SP) Se x é um arco do 3º quadrante e $\cos x = -\frac{1}{2}$, **13.** (Cesgranrio) Se x é ângulo agudo, $\operatorname{tg} (90^\circ + x)$ é igual a

então $\operatorname{cosec} x$ é igual a A) $\operatorname{tg} x$ C) $-\operatorname{tg} x$ E) $1 + \operatorname{tg} x$

A) 5 3 3 4 5 B) $\cotg x$ D) $-\cotg x$ – B) – C) D) E) 3 5 5 5 3

07. 1_3 B) 1_2 C) D) E) 2 1 000 3 3 2 $L(t) = 10\,000 + (\pi t) \sec | | 2 ($
 6 $)$ (UEA-AM) Sabendo que $\sen x = e$ e que x está no 3º Em que t
 representa os meses do ano. O lucro dessa 1ª quadrante, o valor de
 $\cotg x$ é empresa, em reais, no mês de fevereiro, é de 5 1 5 5 5 A) B)
 C) D) E) A) 9 000 C) 10 000 E) 11 000 2 3 3 3 2 B) 9 500 D) 10 500

08. 06. (PUC Minas) O arco que tem medida x em radianos é tal

SEÇÃO ENEM que $\pi < x < p$ e $\tg x = -^1_2$. O valor

do $\sen x$ é 2 **01.** O lucro mensal de uma empresa, em reais, é dado
 por: 3 6 A) (UFPA) Qual das expressões a seguir é idêntica a

$1 - 2$ **02.** Carlos, administrador de empresas, está
 realizando um

$\sen x ()$? trabalho de pesquisa sobre duas empresas
 concorrentes

$\cotg (x)$ $\sen (x)$

A e B. Nesse trabalho, ele está usando várias informações

A) $\sen x$ C) $\tg x$ E) $\cotg x$ sobre cada uma delas, como lucro mensal,
 quantidade

B) $\cos x$ D) $\cossec x$ de funcionários e de clientes.

09. $\lceil \pi \pi \rceil$ O lucro ao longo de um ano de cada empresa, em milhares
 (UFRGS) Para todo $x \in \mid - , .$ O valor de $\mid$ de reais, é fornecido pela
 seguinte função do tempo t , em $\lceil \mid 3 2 \lfloor \mid$

$(\tg_2 x + 1)(\sen_2 x - 1)$ é meses, sendo $t = 1$ correspondente ao mês
 de janeiro:

A) -1 C) 1 E) $-\sec_2 x (\pi t)$ $L(t) = 200 + 50.\cos \mid \mid_A 12$

B) 0 D) $\cos^2 x$ ()

10. (UFRN) A figura a seguir é composta de dois eixos (πt) $L_B(t) = 300 - 50 \cdot \cos^2 t$ $|$ $|$ 24 perpendiculares entre si, x e y , que se intersectam no ()

centro o de um círculo de raio 1, e outro eixo z , paralelo O orientador do trabalho de pesquisa de Carlos pediu

a y e tangente ao círculo no ponto P . A semirreta OQ , para ele fazer uma análise mensal sobre os lucros de

com Q pertencente a z , forma um ângulo α com o eixo y . cada uma das empresas. Portanto, Carlos poderá afirmar

y z que, no mês de abril,

A) a empresa **A** lucrou R\$ 20 000,00 a mais que a

Q empresa **B**.

B) a empresa **B** lucrou R\$ 20 000,00 a mais que a

α empresa **A**.

C) a empresa **A** lucrou R\$ 25 000,00 a mais que a

$O P$ x empresa **B**.

D) a empresa **B** lucrou R\$ 25 000,00 a mais que a

empres
A.

E) as duas empresas tiveram lucros iguais.

Podemos afirmar que o valor da medida do segmento PQ é

GABARITO A) $\sec \alpha$ B) $\operatorname{tg} \alpha$ C) $\operatorname{cotg} \alpha$ D) $\cos \alpha$

11. π (FUVEST-SP) O dobro do seno de um ângulo q , $0 < q$

Fixação

$< ,$

2

é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Logo, 01. D 02. A 03. A 04. A 05. C

o valor de seu cosseno é **Propostos**

2 3 1 3

A) B) C) 2 D) E)

3 2 2 2 3 01. E 04. D 07. E 10. C 13. D

12. (Uscal-BA) Qualquer que seja o número real x , 03. D 02. B 05. A
08. B 11. B 06. D 09. A 12. C

a expressão $\cos^4(x) - \sin^4(x)$ é
equivalente a Seção Enem A) $\sin^2(x) - 1$ D)
 $2 - \cos^2 x$

B) $2(\sin x)(\cos x)$ E) $(\sin(x) + \cos(x)) \cdot \cos x$ 01. D 02. C

C) $2 \cos^2 x - 1$